Современный
Гуманитарный
Университет

Дистанционное образование

0664.01.01;1

Рабочий учеб...

Фамилия, имя, отчество _____

Факультет _____

Номер контракта _____

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ЮНИТА 1

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Москва 2001

Разработано Кирьяновой Л.В., канд. ф.-м. наук, доцентом

Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений

КУРС: ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Юнита 1. Введение в теорию вероятностей.
Юнита 2. Многомерные распределения и предельные теоремы.
Юнита 3. Основные понятия математической статистики.
Юнита 4. Прикладная статистика.

ЮНИТА 1

Изложены основные понятия теории вероятностей, относящиеся к аксиоматике теории вероятностей и случайным величинам. Разобрано большое количество примеров из различных областей знаний. Показано применение вероятностных методов в практических задачах.

Для студентов Современного Гуманитарного Университета

Юнита соответствует профессиональной образовательной программе № 1

ISBN 5-8323-0295-8

(С) СОВРЕМЕННЫЙ ГУМАНИТАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, 2001

ОГЛАВЛЕНИЕ

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН 5
ЛИТЕРАТУРА 6
ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ 7
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР 8
1. Основные понятия теории вероятностей 8
1.1. Стохастический эксперимент, элементарный исход, пространство элементарных исходов, событие, вероятность события, достоверное и невозможное события 10
1.2. Операции над событиями 11
1.3. Аксиоматика теории вероятностей 14
1.4. Классическое определение вероятности 17
2. Условные вероятности 21
2.1. Теорема умножения вероятностей. Независимые события 21
2.2. Формула полной вероятности 28
2.3. Формула Бейеса 31
3. Случайные величины и законы их распределения 34
3.1. Случайная величина и ее функция распределения 34
3.2. Дискретные случайные величины 37
3.2.1. Распределение Бернулли 39
3.2.2. Биномиальное распределение 40
3.2.3. Геометрическое распределение 44
3.2.4. Гипергеометрическое распределение 45
3.2.5. Распределение Пуассона 46
3.3. Непрерывные случайные величины 49
3.3.1. Равномерное распределение 51
3.3.2. Показательное распределение 53
3.3.3. Распределение Коши 57
3.3.4. Нормальное распределение 58
3.3.5. Распределение Пирсона 62
3.4. Функции от случайной величины. Логарифмически нормальное распределение 62
4. Числовые характеристики случайных величин 65
4.1. Математическое ожидание случайной величины 65
4.2. Медиана и мода случайной величины 70
4.3. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение случайной величины 72
4.4. Моменты случайной величины 77
4.5. Квантиль распределения случайной величины 78
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ 80

ТРЕНИНГ УМЕНИЙ 86
ФАЙЛ МАТЕРИАЛОВ 100
ГЛОССАРИЙ*

* Глоссарий расположен в середине учебного пособия и предназначен для самостоятельного заучивания новых понятий.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Основные понятия теории вероятностей. Стохастический эксперимент, элементарный исход, пространство элементарных исходов, событие, вероятность события, достоверное и невозможное события. Операции над событиями. Аксиоматика теории вероятностей. Классическое определение вероятности.

Условные вероятности. Теорема умножения вероятностей. Независимые события. Формула полной вероятности. Формула Бейеса.

Случайные величины и их законы распределения. Случайная величина и ее функция распределения. Дискретные случайные величины (распределение Бернулли, биномиальное распределение, геометрическое распределение, гипергеометрическое распределение, распределение Пуассона). Непрерывные случайные величины (равномерное распределение, показательное распределение, распределение Коши, нормальное распределение, распределение Пирсона). Функции от случайной величины. Логарифмически нормальное распределение.

Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание случайной величины. Медиана и мода случайной величины. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение случайной величины. Моменты случайной величины. Квантили распределения случайной величины.

ЛИТЕРАТУРА

Базовая

*1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., 1998.
*2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. М., 1973.

Дополнительная

*3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., 1998.
*4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей, задачи и упражнения. М., 1973.
*5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., 1988.
*6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1-2. М., 1984.
*7. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. М., 1987.
*8. Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундалевский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика. М., 1991.

Примечание. Знаком(*) отмечены работы, на основе которых составлен тематический обзор.

ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ

№ п/п	Умения	Алгоритмы
1	Вычисление вероятности события А по классической формуле	1. Дать описание стохастического эксперимента, в результате которого может произойти событие А. 2. Вычислить общее число N исходов данного стохастического эксперимента. 3. Вычислить число исходов М, благоприятствующих событию А. 4. Вычислить вероятность события $P(A)=\frac{M}{N}$.
2	Вычисление вероятностей событий по известным вероятностям других событий, с ними связанных	1. Обозначить все события, указанные в задаче, и известные вероятности. 2. Установить связи между событиями. 3. Используя теоремы сложения и умножения вероятностей, а также формулу для вычисления противоположного события, вычислить требуемые вероятности.
3	Вычисление вероятности события А по формуле полной вероятности	1. Дать описание всех гипотез $H_1,H_2,\ldots,H_n$, на которые можно разбить пространство элементарных исходов и события А. 2. Вычислить вероятности каждой гипотезы $P(H_1)$, $P(H_2),\ldots,P(H_n)$. 3. Вычислить условную вероятность события А при каждой гипотезе $P(A\mid H_1)$, $P(A\mid H_2),\ldots,P(A\mid H_n)$, вычислив их. 4. Вычислить вероятность событий А: $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\mid H_i)P(H_i)$.
4	Построение многоугольника распределения дискретной случайной величины по ее ряду распределения	1. Начертить декартову систему координат. 2. По оси абсцисс отложить все возможные значения случайной величины $x_1,x_2,\ldots,x_n$. 3. По оси ординат отложить вероятности возможных значений случайной величины $p_1,p_2,\ldots,p_n$. 4. Полученные точки с координатами $(x_1,p_1),(x_2,p_2),\ldots,(x_n,p_n)$ соединить отрезками прямых.
5	Вычисление вероятности попадания случайных величин X, подчиненной нормальному закону $N(m,\sigma^2)$ на заданный интервал (a,b)	1. Вычислить расстояние от правого и левого концов интервала до центра распределения $\beta=\frac{b-m}{\sigma}$; $\alpha=\frac{a-m}{\sigma}$. 2. По таблице функции $\Phi^*(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt$ найти значения $\Phi^*(\alpha)$ и $\Phi^*(\beta)$. 3. Вычислить искомую вероятность по формуле $P\{X\in(a,b)\}=\Phi^*(\beta)-\Phi^*(\alpha)$.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей – это математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях.

Если в обыденных представлениях, в житейской практике считается, что случайные события представляют собой нечто крайне редкое, идущее в разрез установившемуся, закономерному развитию событий, то в теории вероятностей мы откажемся от этих представлений. Случайные события, как они понимаются в теории вероятностей, обладают рядом характерных особенностей, в частности, все они происходят в массовых явлениях.

Под массовыми явлениями мы понимаем такие, которые имеют место в совокупностях большого числа равноправных или почти равноправных объектов и определяются именно этим массовым характером явления и лишь в незначительной мере зависят от природы составляющих объектов.

Во всех случаях, когда применяются вероятностные методы исследования, их цель состоит в том, чтобы, минуя слишком сложное (и часто практически невозможное) изучение отдельного явления, обусловленного очень большим количеством факторов, обратиться непосредственно к законам, управляющим массами случайных явлений. Изучение этих законов позволяет не только осуществить научный прогноз в своеобразной области случайных явлений, но в ряде случаев помогает целенаправленно влиять на ход случайных явлений, контролировать их, ограничивать сферу действий случайности.

Вероятностный метод в науке не противопоставляет себя классическому методу точных наук, а является его дополнением, позволяющим глубже анализировать явление с учетом присущих ему элементов случайности.

Характерным для современного этапа развития любой науки является широкое и плодотворное применение вероятностных и статистических методов. Это вполне естественно, так как при углубленном изучении любого круга явлений неизбежно наступает этап, когда требуется не только выявление основных закономерностей, но и анализ возможных отклонений от них. В одних науках, в силу специфики предмета и исторических условий, внедрение вероятностных и статистических методов наблюдается раньше, в других – позже. В настоящее время нет почти ни одной

науки, в которой так или иначе не применялись бы вероятностные и статистические методы.

Математические законы теории вероятностей – отражение реальных статистических законов, объективно существующих в массовых случайных явлениях природы. К изучению этих явлений теория вероятностей применяет математический метод и по своему методу является одним из разделов математики, столь же логически точным и строгим, как и другие математические науки.

Возникновение теории вероятностей относится к середине XVII века и связано с исследованиями Паскаля (1623-1662), Ферма (1601-1665) и Гюйгенса (1629-1695) в области азартных игр. В переписке Паскаля и Ферма, относящейся к 1654 году, постепенно определились такие важные понятия, как вероятность и математическое ожидание.

Непосредственное практическое применение вероятностные методы нашли прежде всего в вопросах страхования. Возникавшие в то время в теории вероятностей задачи решались исключительно элементарно-арифметическими и комбинаторными методами.

Серьезные требования со стороны естествознания (теория ошибок наблюдений, задачи теории стрельбы, проблемы статистики народонаселения) привели к необходимости дальнейшего развития теории вероятностей и привлечения более развитого аналитического аппарата. Особенно значительную роль в развитии аналитических методов теории вероятностей сыграли Муавр (1667-1754), Лаплас (1749-1827), Гаусс (1777-1855), Пуассон (1781-1840).

Для всего XVIII и начала XIX вв. характерны бурное развитие теории вероятностей и повсеместное увлечение ею. Теория вероятностей становится "модной" наукой. Ее начинают применять не только там, где это применение правомерно, но и там, где оно ничем не оправдано. Для этого периода характерны многочисленные попытки применить теорию вероятностей к так называемым нравственным наукам. Появились работы, посвященные вопросам судопроизводства, истории, политики, богословия, в которых применялся аппарат теории вероятностей. Для всех псевдонаучных исследований характерен упрощенный, механический подход к общественным явлениям. Подобные попытки были обречены на неудачу, их косвенным результатом стало разочарование в теории вероятностей как в науке в 20-30 годах XIX века в Западной Европе.

Именно в это время в России создается знаменитая Петербургская математическая школа, трудами которой теория вероятностей была поставлена на прочную логическую и математическую основу и сделана надежным, точным и эффективным методом познания. Успех русской

науки был подготовлен деятельностью В.Я. Буняковского (1804-1889), им был написан первый в России курс теории вероятностей, оказавший большое влияние на развитие в России интереса к этой области науки.

Работы П.Л. Чебышева (1821-1889), А.А. Маркова (1856-1922), А.М. Ляпунова (1857-1918), относящиеся к предельным теоремам теории вероятностей и случайным процессам, вывели теорию вероятностей с задворков науки и поставили ее в ряд точных математических наук.

Современное развитие теории вероятностей характеризуется всеобщим подъемом интереса к ней, а также расширением круга ее практических приложений. В США, Франции, Швеции, Италии, Японии, Великобритании, Польше, Венгрии и других странах мира имеется немало ученых, обогащающих теорию вероятностей важными результатами. Российская школа теории вероятностей, унаследовав традиции Петербургской математической школы, занимает в мировой науке одно из ведущих мест.

1.1. Стохастический эксперимент, элементарный исход, пространство элементарных исходов, событие, вероятность события, достоверное и невозможное события

Математическая теория вероятностей приобретает наглядный смысл в связи с такими действительными или мыслимыми опытами (или стохастическими экспериментами), как, например, бросание монеты 100 раз, бросание игральных костей, сдача колоды карт, игра в рулетку, наблюдение продолжительности жизни человека, скрещивание двух сортов растений и наблюдение фенотипов потомков. Сюда же относятся такие явления, как пол новорожденных, колебания числа телефонных вызовов, наличие случайных шумов в системах связи, результаты выборочного контроля качества продукции, положение частицы при диффузии и т.д.

Любая теория обязательно предполагает некоторую идеализацию. Начнем ее с возможных исходов опыта или наблюдения.

Например, при бросании монеты не обязательно выпадает герб или решетка; монета может куда-нибудь закатиться или встать на ребро. Тем не менее мы условимся рассматривать герб и решетку как единственно возможные исходы бросания монеты. Это соглашение упрощает теорию и не сказывается на возможностях ее применения. Идеализация подобного рода проводится постоянно.

Результат некоторого опыта или наблюдения будем называть **событием**. Так, опыт, состоящий в подбрасывании игральной кости, может иметь своим результатом событие, состоящее в том, что выпавшее

число очков – четно.

Элементарным исходом будем называть элементарное, неразложимое событие.

Любое событие может быть разложено на элементарные исходы; иначе говоря, событие есть совокупность элементарных исходов.

Например, сказать, что "сумма очков, выпавших при бросании двух игральных костей, равна шести", все равно, что сказать, что произошло событие "(1, 5), или (2, 4), или (3, 3), или (4, 2), или (5, 1)", и это перечисление разлагает событие "сумма очков равна шести" на пять элементарных исходов.

Элементарные исходы, представляющие собой мыслимые результаты стохастического эксперимента или опыта определяет этот идеализированный (в указанном выше смысле) опыт.

Совокупность всех элементарных исходов в данном опыте будем называть **пространством элементарных исходов**, а сами элементарные исходы – точками этого пространства. Все события, связанные с данным (идеализированным) опытом, могут быть описаны как совокупности элементарных исходов, поэтому слово "событие" будет означать то же самое, что некоторое множество элементарных исходов.

Достоверным будем называть **событие**, которое обязательно произойдет в данном опыте. Пример достоверного события – выпадение не более 6 очков при бросании одной игральной кости.

Невозможное событие – это то, которое в данном опыте произойти не может. Пример невозможного события – выпадение 10 очков при бросании одной игральной кости.

Ясно, что каждое событие обладает той или иной степенью возможности. Чтобы количественно сравнивать между собой события по степени их возможности, очевидно, нужно с каждым событием связать определенное число, которое тем больше, чем более возможно событие. Такое число назовем вероятностью события.

Вероятность события – есть численная мера степени объективной возможности этого события. Вероятность события должна удовлетворять аксиомам, которые будут сформулированы в п.1.3.

1.2. Операции над событиями

Пусть задано произвольное, но фиксированное пространство элементарных исходов, которое обозначают через Ω, такой же символ используют для достоверного события. Будем использовать заглавные латинские буквы A, B, ... для обозначения событий. Тот факт, что элементарный исход (точка) x содержится в событии A, обозначим $x \in A$.

Невозможное событие будем обозначать символом $\varnothing$ (пустое множество).

Два **события тождественны** друг другу (A = B) тогда и только тогда, когда эти события состоят из одних и тех же точек (элементарных исходов).

Событие, состоящее в наступлении обоих событий A и B, называют **произведением** (или пересечением) **событий A и B** и обозначают $A \cdot B$.

Событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A или B, называют **суммой** (или объединением) **событий A и B** и обозначают A + B.

Событие, состоящее в том, что событие A происходит, а событие B не происходит, называют **разностью событий A и B** и обозначают A – B.

Событие $\overline{A}$ называют **противоположным событию A**, если событие A не происходит (т.е. $\overline{A}$ содержит все точки, не содержащиеся в A). Для противоположных событий одновременно выполняются два соотношения: $\overline{A}+A=\Omega$, $\overline{A}\cdot A=\varnothing$.

Проиллюстрируем введенные понятия при помощи диаграмм Вьенна.

Пусть опыт состоит в том, что внутри квадрата, изображенного на рис. 1.1, выбирается наудачу точка. Обозначим через A событие "выбранная точка лежит внутри левой окружности" и через событие B "выбранная точка лежит внутри правой окружности". События A, $\overline{A}$, A + B, $A \cdot B$, A – B, B – A состоят в попадании выбранной точки внутрь областей, заштрихованных на соответствующих фигурах (рис. 1.2).

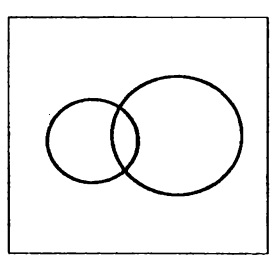


Рис. 1.1

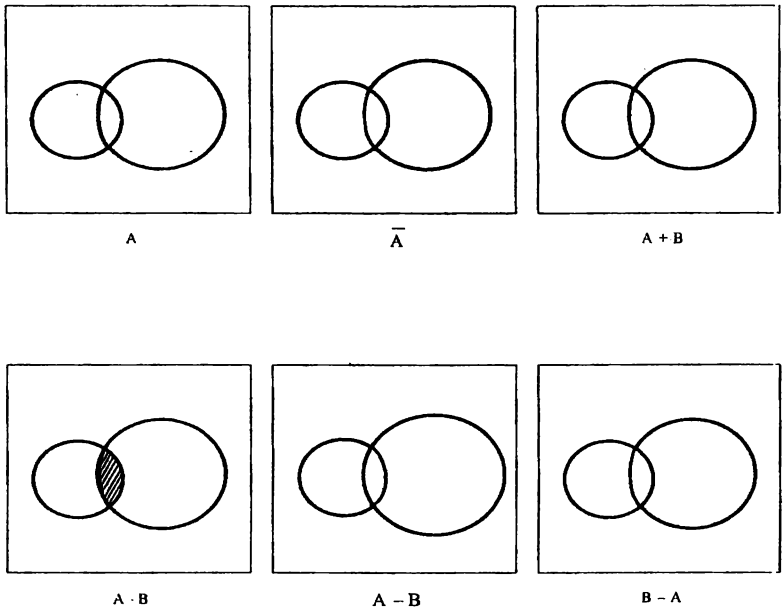


Рис. 1.2

Примеры событий и действий над ними.

Пример 1.1. *Бросание монеты.* Пусть монета подбрасывается три раза. Обозначим Г выпадание при одном бросании герба, Р – решетки. Пространство элементарных исходов состоит из 8 точек: ГГГ, ГГР, ГРГ, РГГ, ГРР, РГР, РРГ, РРР. Событие А "выпало не менее двух гербов" совпадает с множеством первых четырех точек, т.е. $A = \{ГГГ, ГГР, ГРГ, РГГ\}$. Событие В "выпала ровно одна решетка" означает или ГГР, или ГРГ, или РГГ, т.е. $B = \{ГГР, ГРГ, РГГ\}$. В этом случае $A + B = A$; $A \cdot B = B$; $A - B = \{ГГГ\}$.

Пример 1.2. *Возраст супругов.* Страховые компании интересуются распределением возрастов супругов. Пусть событие А состоит в том, что "мужу свыше 40 лет", событие В – "муж старше жены", событие С – "жене свыше 40 лет". Тогда событие $A \cdot B$ означает, что мужу свыше 40 лет и что он старше своей жены. Событие $A - B$ означает, что мужу свыше 40 лет, но он не старше своей жены. Событие $A \cdot C$ означает, что

каждому из супругов свыше 40 лет. Событие A + C означает, что хотя бы одному из них свыше 40 лет.

Два события называют **несовместными**, если их одновременное появление невозможно, т.е. $A \cdot B = \varnothing$. Например, события A и $\overline{A}$ несовместны.

События B_1, B_2, ..., B_n образуют **полную группу событий**, если хотя бы одно из них непременно должно произойти в результате опыта, т.е.

$$B_1 + B_2 + \ldots + B_n = \Omega .$$

Примеры событий, образующих полную группу:

1) выпадение герба и выпадение решетки при бросании монеты;
2) попадание и промах при одном выстреле;
3) появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при бросании игральной кости;
4) появление белого шара и появление черного шара при вынимании наудачу одного шара из урны, содержащей 3 белых и 4 черных шара;
5) ни одной опечатки, одна, две, три и более трех опечаток при проверке страницы напечатанного текста;
6) ни одного отказа, один, два и более двух отказов технического устройства за 24 часа работы.

1.3. Аксиоматика теории вероятностей

В современной математике принято называть аксиомами те предложения, которые принимаются за истинные и в пределах данной теории не доказываются. Все остальные положения этой теории должны выводиться чисто логическим путем из принятых аксиом. Формулировка аксиом представляет собой не начальную стадию развития математической науки, а является результатом длительного накопления фактов и логического анализа полученных результатов с целью выявления действительно основных первичных фактов. Именно так складывались аксиомы геометрии. Подобный же путь прошла и теория вероятностей, в которой аксиоматическое построение ее основ явилось делом сравнительно недавнего прошлого. Впервые задача аксиоматического построения теории вероятностей была решена в 1917 г. советским математиком С.Н. Бернштейном.

В настоящее время общепринята аксиоматика А.Н. Колмогорова (1933 г.), которая связывают теорию вероятностей с теорией множеств и метрической теорией функций.

В аксиоматике А.Н. Колмогорова первичным является пространство (множество) элементарных исходов Ω. Что представляют

собой элементы этого множества для логического развития теории вероятностей – безразлично. Далее рассматривается некоторая система $\mathcal{F}$ подмножеств множества Ω; элементы системы $\mathcal{F}$ называются случайными событиями. Относительно структуры системы $\mathcal{F}$ предполагаются выполненными три следующих требования:

1. $\mathcal{F}$ в качестве элемента содержит достоверное событие Ω.
2. Если A и B – два события, определенные на Ω, – входят в $\mathcal{F}$ в качестве элементов, то в качестве элементов $\mathcal{F}$ также содержит

$$A + B,\ A \cdot B,\ \overline{A},\ \overline{B}.$$

3. Если события A_1, A_2, ..., определенные на Ω, являются элементами $\mathcal{F}$, то их сумма $A_1 + A_2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ и произведение $A_1 \cdot A_2 = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ также являются элементами $\mathcal{F}$.

Множество $\mathcal{F}$, образованное описанным выше способом называют "σ–алгеброй событий".

Теперь перейдем к формулировке аксиом, определяющих вероятность.

Аксиома 1 (аксиома существования вероятности). Каждому случайному событию A из σ-алгебры событий $\mathcal{F}$ поставлено в соответствие неотрицательное число P(A), называемое его вероятностью.

Аксиома 2 (вероятность достоверного события). Вероятность достоверного события равна 1:

$$P(\Omega) = 1.$$

Аксиома 3 (аксиома сложения). Если события A и B несовместны, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Аксиома 4 (расширенная аксиома сложения). Если событие A равносильно наступлению хотя бы одного из попарно несовместных событий A_1, A_2, ..., т.е. $A=\sum_{n>1}^{\infty} A_n$, то $P(A)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Совокупность (Ω, $\mathcal{F}$, P) называют вероятностным пространством.

Вероятность события P(A) - численная мера степени объективной возможности этого события, удовлетворяющая вышеуказанным аксиомам.

Первые три аксиомы определяют вероятность.

Необходимость расширенной аксиомы сложения (аксиомы 4) связана с тем, что в теории вероятностей постоянно приходится рассматривать события, подразделяющиеся на бесконечное число частных случаев. Выведем из них несколько важных следствий.

Следствие 1 (вероятность противоположного события). Вероятность противоположного события вычисляется как единица минус вероятность исходного события:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Доказательство: исходя из определения противоположного события $A + \overline{A} = \Omega$. Тогда по второй аксиоме $P(A + \overline{A}) = 1$. События A и $\overline{A}$ несовместны, следовательно, по третьей аксиоме $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Следствие доказано.

Следствие 2 (вероятность невозможного события). Вероятность невозможного события равна нулю: $P(\varnothing) = 0$.

Доказательство: Так как противоположным к невозможному событию является достоверное, имеем по следствию 1:

$$P(\varnothing) = 1 - P(\Omega).$$

Вероятность достоверного события равна 1, поэтому

$$P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0.$$

Следствие доказано.

Следствие 3. Вероятность любого события $P(A) \in [0, 1]$.

Доказательство: сразу следует из аксиомы 2 и следствия 2.

Теорема сложения

Для произвольных событий A и B верно $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей двух событий без вероятности их пересечения.

Доказательство: представим событие A + B в виде суммы несовместных событий $A + B = A + [B - A \cdot B]$, тогда в силу аксиомы 3 имеем $P(A + B) = P(A + [B - A \cdot B]) = P(A) + P(B - A \cdot B)$.

Аналогично $P(B) = P(A \cdot B + [B - A \cdot B]) = P(A \cdot B) + P(B - A \cdot B)$.

Из последнего равенства следует, что $P(B - A \cdot B) = P(B) - P(A \cdot B)$.

Таким образом, $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.

Теорема доказана.

Пример 1.3. Студент озабочен предстоящими экзаменами по английскому языку и истории. По его мнению, вероятность того, что он сдаст английский язык, равна 0,4; вероятность того, что он сдаст по крайней мере один предмет равна 0,6; вероятность того, что он сдаст оба предмета, равна 0,1. Найти вероятность того, что он сдаст экзамен по истории.

Решение. Обозначим: событие A – студент сдаст английский язык; B – студент сдаст историю. Тогда по условию задачи P(A) = 0,4; P(A·B) = 0,1; P(A+B) = 0,6.

Согласно теореме сложения

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, откуда

$P(B) = P(A + B) + P(AB) - P(A)$, т.е.

$P(B) = 0{,}6 + 0{,}1 - 0{,}4 = 0{,}3$.

Теорему сложения можно обобщить на случай трех событий:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cdot B) - P(A \cdot C) - P(B \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C).$$

1.4. Классическое определение вероятности

Классическое определение вероятности основано на равновозможности или равновероятности элементарных исходов в некотором опыте (стохастическом эксперименте). Например, при бросании игральной кости, которая имеет точную форму куба и изготовлена из однородного материала, равновероятными элементарными исходами будут выпадение какого-либо определенного числа очков (от 1 до 6), обозначенного на гранях этого куба, поскольку в силу наличия симметрии ни одна из граней не имеет объективного преимущества перед другими. Аналогично, при подбрасывании симметричной однородной монеты, равновероятными элементарными исходами будут выпадение герба и выпадение решетки.

В общем случае рассмотрим полную группу, состоящую из конечного числа элементарных, равновозможных несовместных событий (исходов) некоторого опыта. Такую группу называют группой

возможных результатов опыта или испытания. Те из возможных результатов опыта, на которые подразделяется событие А, называют результатами опыта, благоприятствующими А.

Классическое определение вероятности события формулируют следующим образом:

вероятность Р(А) события А равна отношению числа возможных результатов опыта (М), благоприятствующих событию А, к числу всех возможных результатов опыта (N):

$$P(A)=\frac{M}{N}.$$

Определенная таким образом вероятность удовлетворяет аксиомам вероятности Колмогорова.

Полезность пространств с равновероятными элементарными исходами проявляется при изучении азартных игр и в комбинаторном анализе.

Примеры вычисления вероятности по классической формуле:

Пример 1.4. *Подбрасывание игральной кости один раз*. Событие А состоит в том, что выпавшее число очков – четно. В этом случае N = 6 – число граней куба; М = 3 – число граней с четными номерами; тогда

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Пример 1.5. *Подбрасывание симметрической монеты 2 раза*. Событие А состоит в том, что выпало ровно 2 герба. В этом случае N = 4, т.к. $\Omega=\{ГГ,ГР,РГ,РР\}$; М = 1, т.к. $A=\{ГГ\}$. Тогда $P(A)=\frac{1}{4}$.

Пример 1.6. *Вытягивание шара из урны, содержащей 2 белых и 3 черных шара*. Событие А состоит в том, что вытянули черный шар. В этом случае $N=2+3=5$ (общее число шаров в урне), М = 3 (число черных шаров), тогда $P(A)=\frac{3}{5}$.

Вычисление вероятности по формуле $P=\frac{M}{N}$ вызывает в некоторых случаях затруднения при определении значений M и N. Эти затруднения связаны, в частности, с тем, что при решении ряда задач требуется применение формул из комбинаторики. Поэтому полезными являются нижеследующие **комбинаторные формулы.**

Число всевозможных перестановок из n различных элементов равно n! (читается "эн факториал" и обозначает произведение всех целых чисел от 1 до n, т.е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$, по определению $0! = 1$).

Например, число способов рассадить 4-х человек на 4-х местах равно $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Число всевозможных способов выбрать m элементов из n элементов (порядок, в котором выбирались элементы, роли не играет) называют числом сочетаний из n по m, обозначают C_n^m.

Справедлива формула $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Например, число способов выбрать трех дежурных из группы в 20 человек равно $C_{20}^3 = \frac{20!}{3!17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} = 20 \cdot 19 \cdot 3 = 1140$.

Число всевозможных способов выбрать m элементов из n в определенном порядке называют числом размещений из n элементов по m, обозначают A_n^m.

Справедлива формула $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Например, число способов выбрать председателя и секретаря собрания, если в нем участвуют 20 человек, равно $A_{20}^2 = \frac{20!}{18!} = 380$.

Примеры вычисления вероятности события по классической формуле с применением комбинаторных формул:

Пример 1.7. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры. Какова вероятность того, что он с первого раза наберет эти цифры правильно, если он помнит, что они различны?

Решение. Обозначим А – событие, состоящее в том, что абонент, набрав произвольно две цифры, угадал их правильно. М – число правильных вариантов, очевидно, что М = 1; N – число различных цифр,

$$N = A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = 90.$$

Таким образом, $P(A) = \frac{M}{N} = \frac{1}{90}$.

Пример 1.8. Шесть шариков случайным образом располагаются в шести ящиках так, что для каждого шарика равновероятно попадание в любой ящик и в одном ящике может находиться несколько шариков. Какова вероятность того, что в каждом ящике окажется по одному шарику?

Решение. Событие А – в каждом ящике по одному шарику. М – число вариантов распределения шариков, при которых в каждый ящик попадает по одному шарику, М = 6! (число способов переставить между собой 6 элементов). N – общее число вариантов $N = 6^6$ (так как каждый шарик может попасть в каждый из ящиков).

В результате получаем $P(A) = \frac{6!}{6^6} = \frac{5!}{6^5}$.

Пример 1.9. В урне 3 белых и 4 черных шара. Из урны вынимаются два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Решение. Обозначим: А – событие, состоящее в появлении белых шаров; N – число способов вытащить 2 шара из 7; $N = C_7^2$; М – число способов вытащить 2 белых шара из имеющихся 3 белых шаров; $M = C_3^2$.

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{2!5!3!}{7!2!1!} = \frac{3!}{7 \cdot 6} = \frac{1}{7}$$

Рассмотрим пример вычисления вероятностей событий по классической формуле с использованием теоремы сложения.

Пример 1.10. В лотерее 1 000 билетов; из них на один билет падает выигрыш 500 руб, на 10 билетов – выигрыши по 100 руб, на 50 билетов – выигрыши по 20 руб, на 100 билетов – выигрыши по 5 руб,

остальные билеты невыигрышные. Некто покупает 1 билет. Найти вероятность выиграть не менее 20 руб.

Решение.

Рассмотрим события:

A – выиграть не менее 20 руб;

A_1 – выиграть 20 руб;

A_2 – выиграть 100 руб;

A_3 – выиграть 500 руб.

Очевидно, $A = A_1 + A_2 + A_3$.

По теореме сложения вероятностей $P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$,

так как $A_1 \cdot A_2 = \varnothing$, $A_1 \cdot A_3 = \varnothing$; $A_2 \cdot A_3 = \varnothing$.

Имеем $P(A_1)=\frac{50}{1000}$; $P(A_2)=\frac{10}{1000}$; $P(A_3)=\frac{1}{1000}$,

тогда $P(A)=0{,}05+0{,}01+0{,}001=0{,}061$.

2.УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

2.1. Теорема умножения вероятностей. Независимые события

Понятие условной вероятности является основным инструментом теории вероятностей.

Вероятность события A в предположении, что уже произошло событие B, называют **условной вероятностью события A при условии B** и обозначают $P(A|B)$.

Пример 2.1. В урне два белых шара и один черный; два человека вынимают последовательно из урны по одному шару. Рассмотрим два события: B – появление белого шара у первого человека; A – появление белого шара у второго человека.

Тогда $P(B)=\frac{2}{3}$. Теперь вычислим $P(A|B)$, $P(A|\bar{B})$.

$P(A|B)$ – это вероятность того, что второй человек вытащит белый шар, при условии, что первый человек уже вытащил один белый шар.

Так как в урне остался один белый шар, то $P(A|B)=\frac{1}{2}$.

$P(A|\overline{B})$ – это вероятность того, что второй человек вытащит белый шар, при условии, что первый человек вытащил черный. Так как в урне осталось два белых шара и ни одного черного, то $P(A|\overline{B})=1$. Сравнивая полученные вероятности, можно сделать вывод, что событие А зависит от события В и вероятность появления события А носит условный характер.

Теорема умножения

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из событий на условную вероятность другого при условии, что первое произошло:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A|B).$$

Доказательство: проведем для классических вероятностей.

Пусть из общего числа N исходов опыта наступлению события А благоприятствует М исходов, а наступлению В благоприятствует К исходов из числа М исходов, благоприятствующих наступлению события А. Это значит, что совместному наступлению событий А и В благоприятствует К исходов из общего их числа N. Поэтому $P(A\cdot B)=\frac{K}{N}$.

Домножим числитель и знаменатель полученной дроби на М, тогда

$$P(A\cdot B)=\frac{M}{N}\cdot\frac{K}{M}.$$

Здесь первый множитель представляет собой вероятность события А, т.е. $\frac{M}{N}=P(A)$, а второй множитель выражает вероятность события В при условии, что произошло событие А, т.е. $\frac{K}{M}=P(B|A)$.

Отсюда $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B|A)$.

Аналогично доказывается, что $P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A|B)$.

Теорема доказана.

Из теоремы умножения следует формула для вычисления условной вероятности события $P(A|B)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}$.

Этой формулой можно пользоваться, если P(B) ≠ 0. Если же P(B) = 0 (т.е. событие B – невозможно), то по теореме умножения,

$$P(A|B)=0 \text{ и } P(A\cdot B)=0.$$

Таким образом,

$$P(A|B)=\begin{cases}\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}, & \text{если } P(B)\neq 0\\ 0, & \text{если } P(B)=0\end{cases}$$

Условная вероятность обладает всеми свойствами вероятности (удовлетворяющими аксиомам, сформулированным в гл.1).

Таким образом, рассмотрение условных вероятностей при одном и том же данном событии B равносильно выбору B в качестве нового пространства элементарных исходов с вероятностями, пропорциональными первоначальным. Коэффициент пропорциональности P(B) необходим для того, чтобы сделать вероятность нового пространства равной 1. Все основные теоремы о вероятностях остаются справедливыми для условных вероятностей, взятых относительно некоторого фиксированного события B.

Пример 2.2. Страховую компанию может интересовать частота повреждений, вызванных молнией и приносящих фиксированный ущерб (событие A). Вероятно, эта компания имеет различные категории застрахованных объектов: индустриальные, городские, сельские и т.д. Изучение отдельного ущерба, нанесенного индустриальным объектам, означает исследование события A лишь в связи с событием B, где B – рассматриваемый объект является индустриальным; P(A/B) – вероятность того, что ущерб причинен индустриальному объекту.Формула для вычисления условной вероятности применима очевидным образом. Однако для страховой компании, специализирующейся на индустриальных объектах, событие B совпадает со всем пространством элементарных исходов и P(A/B) сводится к P(A).

Пример 2.3. Пусть из N человек N_A человек страдает

дальтонизмом и N_B являются женщинами. Обозначим через A и B соответственно события, состоящие в том, что случайно выбранный человек страдает дальтонизмом или что он является женщиной. Тогда $P(A)=\frac{N_A}{N}$; $P(B)=\frac{N_B}{N}$. Рассмотрим множество, состоящее только из женщин. Вероятность того, что лицо, случайно выбранное из этого множества страдает дальтонизмом, равна $\frac{N_{AB}}{N_B}$, где N_{AB} – число женщин-дальтоников, т.е.

$$P(A|B)=\frac{N_{AB}}{N_B}=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}.$$

События A и B называют **независимыми**, если вероятность произведения событий равна произведению соответствующих вероятностей

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B).$$

Если события A и B независимы, то условная вероятность равна $P(A|B)$ **безусловной** P(A), а условная вероятность $P(B|A)$ равна безусловной вероятности P(B).

Понятие независимости событий играет значительную роль в теории вероятностей и ее приложениях. В практических вопросах для определения независимости данных событий редко обращаются к проверке выполнения равенства, данного в определении. Обычно для этого пользуются интуитивными соображениями, основанными на опыте.

Так, например, ясно, что выпадение герба на одной монете не изменяет вероятности появление герба на другой монете, если только эти монеты во время бросания не скреплены между собой. Точно так же рождение мальчика у одной матери не изменяет вероятности появления мальчика у другой матери. Это – независимые события.

События $B_1, B_2, \ldots, B_S$ называют **независимыми в совокупности**, если для любых $1\le i_1<i_2<\ldots<i_r\le S,(1\le r\le S)$ выполнено:

$$P(B_{i_1}\cdot B_{i_2}\ldots B_{i_r})=P(B_{i_1})\cdot P(B_{i_2})\ldots P(B_{i_r}).$$

Заметим, что для независимости в совокупности нескольких событий недостаточно их попарной независимости.

Пример 2.4 (С.Н. Бернштейна). Пусть грани тетраэдра окрашены: первая в красный цвет (А), вторая в зеленый (В), третья в синий (С) и четвертая во все эти три цвета (АВС).

Легко видеть, что вероятность грани, на которую упадет тетраэдр при бросании, в своей окраске иметь красный цвет равна $\frac{1}{2}$ (всего граней 4 и две из них имеют в своей окраске красный цвет). Таким образом, $P(A)=\frac{1}{2}$. Аналогично $P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$.

Далее, вероятность того, что грань, на которую упадет тетраэдр при бросании, в своей окраске будет иметь красный и зеленый цвет, равна $\frac{1}{4}$ (т.к. только одна из четырех граней окрашена разными цветами). Поэтому $P(A \cdot B)=\frac{1}{4}$. Аналогично, $P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4}$. Ясно, что события А, В и С попарно независимы, так как

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(BC) = P(B) \cdot P(C)$$
$$P(AC) = P(A) \cdot P(C).$$

Однако вероятность того, что осуществится событие А·В·С (тетраэдр упадет на разноцветную грань), также равна $\frac{1}{4}$.

Следовательно,

$$P(ABC) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

и события А, В и С не являются независимыми в совокупности.

Рассмотрим пример использования теоремы умножения вероятностей при решении задач:

Пример 2.5. Прибор, работающий в течение времени t, состоит из трех узлов, каждый из которых, независимо от других, может в течение времени t выйти из строя. Отказ хотя бы одного узла приводит к отказу прибора в целом. За время t надежность (вероятность безотказной работы) первого узла равна $p_1 = 0,9$; второго $p_2 = 0,8$; третьего $p_3 = 0,7$. Найти надежность прибора в целом.

Решение. Обозначим событие:

A – безотказная работа прибора;

A_1 – безотказная работа первого узла;

A_2 – безотказная работа второго узла;

A_3 – безотказная работа третьего узла.

Имеем: $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, отсюда по теореме умножения для независимых событий

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = 0{,}504.$$

На практике встречаются задачи, в которых требуется применить теорему умножения и теорему сложения.

Пример 2.6. Студент пришел сдавать зачет, зная из 30 вопросов только 20. Какова вероятность сдать зачет, если после отказа отвечать на первый вопрос, преподаватель задает еще один?

Решение. Обозначим события:

A – студент сдал зачет;

B – студент ответил на первый вопрос преподавателя;

C – студент ответил на второй вопрос преподавателя.

Ясно, что $A = B + \overline{B} \cdot C$ – т.е. студент сдаст зачет, если либо он ответит на первый вопрос, либо не ответит на первый, но ответит на второй.

По теореме сложения

$$P(A) = P(B + \overline{B} \cdot C) = P(B) + P(\overline{B} \cdot C) - P(B \cdot \overline{B}C),$$

но $B \cdot \overline{B} \cdot C = \varnothing$ (так как события B и $\overline{B}$ не могут осуществиться одновременно), поэтому $P(A) = P(B) + P(\overline{B} \cdot C)$.

По условию задачи $P(B) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.

По теореме умножения $P(\overline{B} \cdot C) = P(C|\overline{B}) \cdot P(\overline{B})$.

Далее, $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{1}{3}$;

$P(C|\overline{B})$ – вероятность ответить на второй вопрос при условии, что студент не ответил на первый.

$P(C|\overline{B})=\frac{20}{29}$, так как осталось 29 вопросов, из них студент знает 20.

Таким образом, $P(A)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{20}{29}=\frac{26}{29}\approx 0{,}897$.

Пример 2.7. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,8, а вторым 0,7. Стрелки делают по одному выстрелу по цели одновременно. Определить вероятность того, что цель будет поражена, если стрелки стреляют независимо друг от друга.

Решение. Обозначим события:

A_1 – цель поражена первым стрелком;

A_2 – цель поражена вторым стрелком;

A – цель поражена.

Ясно, что $A = A_1 + A_2$.

По теореме сложения

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2).$$

По условию задачи $P(A_1) = 0{,}8;\ P(A_2) = 0{,}7$.

Так как события A_1 и A_2 независимы, то по теореме умножения

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Таким образом,

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}94.$$

Пример 2.8. Электрическая цепь состоит из двух параллельно включенных приборов, независимо работающих. Вероятность отказа первого прибора 0,1, а второго – 0,2. Какова вероятность того, что ток по цепи пойдет?

Решение. Так как приборы соединены параллельно, то разрыв цепи не наступит, если работает хотя бы один прибор.

Пусть событие A – работает первый прибор;

B – работает второй прибор;

C – ток идет по цепи.

Ясно, что C = A + B, тогда по теореме сложения

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Используя формулу для вероятности противоположного события, имеем $P(A) = 0{,}9$; $P(B) = 0{,}8$.

Используем теорему умножения, так как A и B независимы

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72 .$$

Таким образом, $P(C) = 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}72 = 0{,}98$.

2.2. Формула полной вероятности

Следствием теорем сложения и умножения вероятностей является формула полной вероятности.

Пусть требуется определить вероятность некоторого события A, которое может произойти вместе с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу несовместных событий. Будем эти события называть **гипотезами.**

В этом случае вероятность события A вычисляется как сумма произведений вероятности каждой гипотезы на условную вероятность события при этой гипотезе:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \; P(A|H_i).$$

Последнюю формулу называют **формулой полной вероятности.**

Докажем ее.

Так как гипотезы $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу, то событие A может появиться только в комбинации с какой-либо из этих гипотез:

$$A = A \cdot H_1 + A \cdot H_2 + ... + A \cdot H_n .$$

Так как гипотезы $H_1, H_2, ..., H_n$ несовместны, то и события также несовместны; применяя к ним теорему сложения, получим:

$$P(A) = P(A \cdot H_1) + P(A \cdot H_2) + ... + P(A \cdot H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cdot H_i).$$

Применяя к событию $A \cdot H_i$ теорему умножения, получим:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \times P(A|H_i),$$

что и требовалось доказать.

Примеры использования формулы полной вероятности:

Пример 2.9. Имеются три одинаковых на вид урны; в первой урне 2 белых и 1 черный шар; во второй – 3 белых и 1 черный; в третьей – 2 белых и 2 черных шара. Некто выбирает наудачу одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар – белый.

Решение. Рассмотрим 3 гипотезы:

H_1 – выбор первой урны;

H_2 – выбор второй урны;

H_3 – выбор третьей урны;

и событие А – появление белого шара.

Так как гипотезы, по условию задачи, равновозможны, то

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Условные вероятности события А при этих гипотезах соответственно равны $P(A|H_1) = \frac{2}{3}; P(A|H_2) = \frac{3}{4}; P(A|H_3) = \frac{1}{2}$.

По формуле полной вероятности $P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{23}{36}$.

Пример 2.10. Пластмассовые изделия изготовляются на трех прессах. Первый пресс вырабатывает 50% всех изделий, второй – 30% и третий – 20%. При этом первый пресс дает 0,025% брака, второй – 0,02% брака, третий – 0,015%.

Найти вероятность того, что наудачу взятая со склада болванка соответствует стандарту.

Решение. Обозначим:

H_1 – появление изделия с I пресса;

H_2 – появление изделия со II пресса;

H_3 – появление изделия с III пресса;

А – соответствие изделия стандарту.

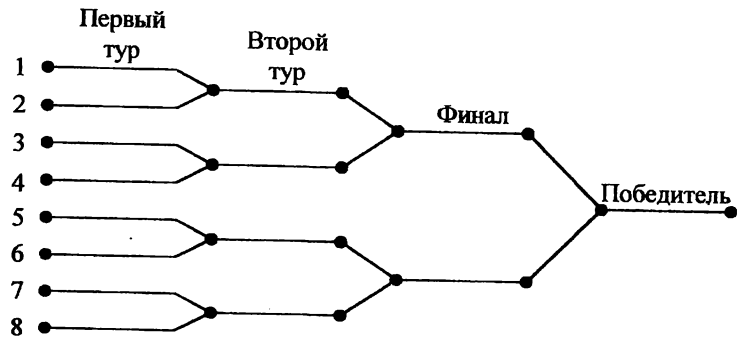
Имеем $P(H_1) = 0{,}5; P(H_2) = 0{,}3; P(H_3) = 0{,}2.$

Для отдельных прессов имеем следующие условные вероятности выпуска стандартных изделий:

$$P(A|H_1)=0{,}975; \quad P(A|H_2)=0{,}98; \quad P(A|H_3)=0{,}985.$$

Отсюда $P(A) = 0{,}5\cdot 0{,}975 + 0{,}3\cdot 0{,}98 + 0{,}2\cdot 0{,}985 = 0{,}9785.$

Пример 2.11. Король Артур проводит рыцарский турнир, в котором порядок состязания определяется жребием. Турнирная таблица приведена на рисунке.



Среди 8 рыцарей, одинаково искусных в ратном деле, два близнеца. Какова вероятность того, что они встретятся в поединке?

Решение. Без ограничения общности можно считать, что один из близнецов имеет №1.

Обозначим гипотезы:

H_1 – второй близнец имеет №2;

H_2 – второй близнец имеет №3 или №4;

H_3 – второй близнец имеет №5 – №8.

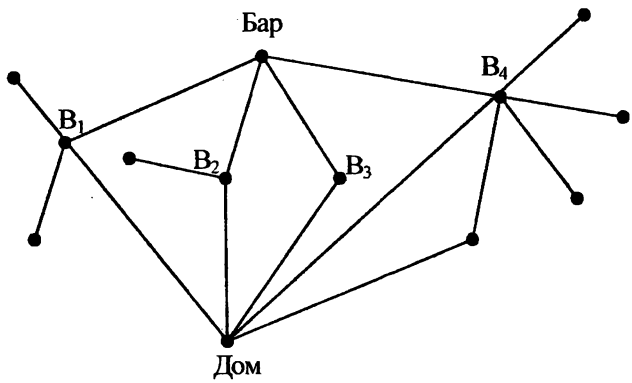
Тогда $P(H_1)=\frac{1}{7}; P(H_2)=\frac{2}{7}; P(H_3)=\frac{4}{7}.$

Пусть событие А – два близнеца встретятся в поединке, тогда $P(A|H_1)=1; P(A|H_2)=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$ так как для осуществления А при условии H_2 каждый из рыцарей-близнецов должен победить в первом туре.

Аналогично $P(A|H_3)=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}.$

Таким образом, $P(A)=\frac{1}{7}\cdot 1+\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{4}+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{4}.$

Пример 2.12. Некто вышел из бара и не может вспомнить, какая улица ведет к его дому. Он выбирает наугад один из возможных путей (см. рисунок). Какова вероятность того, что он при этом попадет домой?



Решение. Обозначим через H_i – выбор дороги; B_i (i = 1, 2. 3, 4); тогда $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=P(H_4)=\frac{1}{4}$, так как путник выбирает дорогу наугад.

Пусть событие D – путник добрался домой, тогда $P(D|H_1)=\frac{1}{3}$, так как в дом из B_1 ведет одна из трех дорог, аналогично $P(D|H_2)=\frac{1}{2}$; $P(D|H_3)=1$; $P(D|H_4)=\frac{2}{5}$.

По формуле полной вероятности $P(D)=\frac{1}{4}(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1+\frac{2}{5})=\frac{67}{120}$.

2.3. Формула Бейеса

Следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности является формула Бейеса, названная по имени установившего ее в 1763 году Т. Бейеса.

Пусть имеется полная группа несовместных событий – гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Вероятности этих гипотез до проведения опыта известны и равны соответственно $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$. Эти вероятности называют **априорными** (или вероятностями a priori). Произведен опыт, в результате которого произошло некоторое событие A. Требуется пересчитать вероятности гипотез в связи с появлением этого события, т.е. вычислить условную вероятность $P(H_i|A)$ для каждой гипотезы. Условные вероятности гипотез после проведения опыта и реализации события A называют **апостериорными** (или вероятностями a posteriori).

По теореме умножения имеем:

$$P(A \cdot H_i)=P(A|H_i)\cdot P(H_i)=P(H_i|A)\cdot P(A) \text{ для } i=\overline{1,n},$$

откуда $P(H_i|A)=\dfrac{P(H_i)\cdot P(A|H_i)}{P(A)}$ для $i=\overline{1,n}$.

Выражая P(A) с помощью формулы полной вероятности, имеем

$$P(H_i|A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|H_j)\ P(H_j)} \text{ для } i=\overline{1,n}.$$

Последняя формула носит название формулы Бейеса. Это формула для вычисления апостериорных вероятностей через априорные.

Примеры использования формулы Бейеса:

Пример 2.13. На предприятии изготавливаются изделия определенного вида на трех поточных линиях. На первой линии производится 20% изделий от всего объема их производства, на второй – 30%, на третьей – 50%. Каждая из линий характеризуется соответственно следующими процентами брака: 5%, 2%, 3%. Наугад взятое изделие оказалось бракованным, требуется определить вероятность того, что оно сделано на первой линии.

Решение. Обозначим H_1, H_2, H_3 события, состоящие в том, что наугад взятое изделие произведено на первой, второй и третьей линиях.

Согласно условиям задачи $P(H_1)=0{,}2; P(H_2)=0{,}3; P(H_3)=0{,}5.$

Обозначим A – событие, состоящее в том, что наугад взятое изделие оказалось бракованным.

По условиям задачи

$$P(A|H_1)=0,05;\quad P(A|H_2)=0,02;\quad P(A|H_3)=0,03.$$

По формуле Бейеса имеем

$$P(H_1|A)=\frac{P(A|H_1)\cdot P(H_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(H_1)\ P(A|H_1)}=\frac{0,05\cdot 0,2}{0,05\cdot 0,2+0,02\cdot 0,3+0,03\cdot 0,5}=\frac{0,01}{0,031}=\frac{10}{31}.$$

Пример 2.14. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены отлично, 4 – хорошо, 2 – удовлетворительно и 1 – плохо. Имеется 20 вопросов, причем: отлично подготовленный студент может ответить на все, хорошо подготовленный – на 16, удовлетворительно подготовленный – на 10 и плохо подготовленный – на 5.

Вызванный наугад студент ответил на три заданных ему случайным образом вопроса. Найти вероятность того, что этот студент плохо подготовлен и ему просто повезло с вопросами.

Решение. Обозначим А – событие, состоящее в том, что случайно вызванный студент ответил на все доставшиеся ему вопросы.

Это событие может произойти при реализации одной из четырех гипотез:

H_1 – студент подготовлен отлично;

H_2 – студент подготовлен хорошо;

H_3 – студент подготовлен удовлетворительно;

H_4 – студент подготовлен плохо.

Априорные вероятности гипотез равны

$$P(H_1)=0,3;\ P(H_2)=0,4;\ P(H_3)=0,2;\ P(H_4)=0,1.$$

Вероятности наступления события А при условии реализации соответствующей гипотезы найдем, применяя классическое определение вероятности:

$$P(A|H_1)=1;\quad P(A|H_2)=\frac{C_{16}^3}{C_{20}^3}=0,491;\quad P(A|H_3)=\frac{C_{10}^3}{C_{20}^3}=0,105;$$

$$P(A|H_4)=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=0,009.$$

Искомую вероятность найдем по формуле Бейеса:

$$P(H_4|A)=\frac{P(H_4)\cdot P(A|H_4)}{\sum_{i=1}^{4}P(H_i)\ P(A|H_i)}=\frac{0{,}1\cdot 0{,}009}{0{,}3\cdot 1+0{,}4\cdot 0{,}491+0{,}2\cdot 0{,}105+0{,}1\cdot 0{,}009}=\frac{0{,}0009}{0{,}518}=0{,}002.$$

3. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ЗАКОНЫ ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

3.1. Случайная величина и ее функция распределения

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие случайной величины. Прежде чем переходить к формальному определению, рассмотрим ряд примеров.

Число вызовов, поступивших от абонентов на телефонную станцию в течение определенного промежутка времени, является случайным и принимает те или иные значения в зависимости от случайных обстоятельств.

Периметр перпендикулярного сечения ствола дерева, произвольным образом выбранного в лесу, определяется большим количеством причин, носящих случайный характер, поэтому является случайной величиной.

Число отличных оценок у студентов одной группы на экзамене; число ничейных результатов в шахматном турнире; расстояние точки падения диска от точки метания; вес наугад взятого зерна пшеницы; число избирателей, которые могут отдать свои голоса определенному политическому блоку, - примеры случайных величин, относящиеся к различным областям жизни.

Несмотря на всю разнородность конкретного содержания приведенных примеров, все они с точки зрения математики представляют одну и ту же картину. Каждая из этих величин под влиянием случайных обстоятельств способна принимать различные значения. Заранее указать, какое значение примет эта величина, нельзя, так как оно меняется от испытания к испытанию случайным образом.

Для того чтобы знать случайную величину, необходимо знать те значения, которые она может принимать, и вероятности, с которыми случайная величина принимает свои значения.

Разнообразие случайных величин весьма велико. Число принимаемых ими значений может быть конечным, счетным или

несчетным; значения могут быть расположены дискретно или заполнять интервалы (конечные или бесконечные). Для того, чтобы задавать вероятности значений случайных величин, столь различных по своей природе, и притом задавать их одним и тем же способом, в теории вероятностей используют функцию распределения случайной величины.

Случайной величиной называется переменная величина, значения которой зависят от случая и для которой определена функция распределения.

Пусть X – случайная величина, x – действительное число. Вероятность того, что X примет значение, меньшее чем x, называется **функцией распределения вероятностей случайной величины**: $F_x(x) = P\{X < x\}$.

Сформулируем некоторые общие свойства функции распределения, которые следуют из определения функции распределения и аксиом вероятности.

1) При помощи функции распределения случайной величины X можно определить вероятность того, что $X \in [x_1, x_2)$ для любых x_1 и x_2, по формуле:

$$P\{X \in [x_1, x_2)\} = F_x(x_2) - F_x(x_1).$$

Действительно, пусть A – событие, состоящее в том, что X примет значение, меньшее, чем x_2; B – событие, состоящее в том, что $X < x_1$, и, наконец, C – событие $x_1 \le X < x_2$; тогда, очевидно, A = B + C.

Так как события B и C несовместны, то $P(A) = P(B) + P(C)$.

Но $P(A) = F_x(x_2)$; $P(B) = F_x(x_1)$; $P(C) = P\{X \in [x_1, x_2)\}$,

поэтому $P\{X \in [x_1, x_2)\} = F_x(x_2) - F_x(x_1)$.

2) Функция распределения F(x) есть неубывающая функция аргумента, т.е. при $x_2 > x_1$ имеет место: $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Действительно, так как, по определению, вероятность есть неотрицательное число, то из свойства (1) следует свойство (2).

3) Предел функции распределения на минус бесконечности равен нулю: $F(-\infty) = 0$.

Предел функции распределения на плюс бесконечности равен единице: $F(+\infty) = 1$.

Действительно, так как неравенство $\{X < +\infty\}$ достоверно, то

$P\{X<+\infty\}=1.$

Обозначим через Q_k событие, состоящее в том, что $X\in[k-1,k)$. Так как событие $\{X<+\infty\}$ эквивалентно сумме событий Q_k, то на основании расширенной аксиомы сложения $P\{X<+\infty\}=1$.

Следовательно, при $n\to\infty$

$$\sum_{k=-n}^{n}P\{Q_k\}=\sum_{k=-n}^{n}[F(k)-F(k-1)]=F(n)-F(-n)\xrightarrow[n\to\infty]{}1.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $0\le F(x)\le 1$ для любого числа x, заключаем, что $F(-\infty)=\lim\limits_{n\to+\infty}F(-n)=0$

$$F(+\infty)=\lim_{n\to+\infty}F(n)=1.$$

4) Функция распределения непрерывна слева, то есть

$$P\{X<x\}=F(x)=F(x-0);$$
$$P\{X\le x\}=F(x+0).$$

Таким образом, $P\{X=x\}=F(x+0)-F(x)$.

Это означает, что вероятность того, что случайная величина X примет значение x, равна скачку функции распределения в точке x.

Четыре свойства функции распределения означают, что каждая функция распределения является неубывающей, непрерывной слева и удовлетворяющей условиям $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$ функцией. Верно и обратное. Каждая функция, удовлетворяющая перечисленным условиям, может рассматриваться как функция распределения некоторой случайной величины.

Заметим, что в то время, как каждая случайная величина однозначно определяет свою функцию распределения, существует сколько угодно различных случайных величин, имеющих одну и ту же функцию распределения. Так, если случайная величина X принимает два значения -1 и $+1$ (каждое с вероятностью $\frac{1}{2}$) и случайная величина $Y=-X$, то ясно, что X всегда отлична от Y. Тем не менее обе эти

случайные величины имеют одну и ту же функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{при } x \le -1\\ \frac{1}{2}, \text{при } -1 < x \le 1\\ 1, \text{при } x > 1.\end{cases}$$

В дальнейшем будем рассматривать два типа случайных величин – дискретные и непрерывные.

3.2. Дискретные случайные величины

Дискретные случайные величины – это случайные величины, которые могут принимать только конечное или счетное (бесконечное множество, все элементы которого можно занумеровать натуральными числами) множество значений.

Например, число появлений герба при трех подбрасываниях монеты (возможные значения 0, 1, 2, 3); число отказавших элементов в приборе, состоящем из пяти элементов (возможные значения 0, 1, 2, 3, 4, 5); число выстрелов до первого попадания в цель (возможные значения 1, 2, ..., N, где N – число имеющихся в наличии патронов), число опечаток в книге (возможные значения 0, 1, 2, ..., n) – это все дискретные случайные величины.

Для полной вероятностной характеристики дискретной случайной величины X, принимающей с положительными вероятностями значения x_1, x_2, x_3, ..., достаточно знать вероятности, с которыми случайная величина принимает все свои возможные значения $p_k = P\{X = x_k\}$. Совокупность значений случайной величины $\{x_k\}$ и их вероятностей $\{p_k\}$ называют **рядом распределения**. Ряд распределения часто записывают в виде таблицы, где в верхней строчке перечисляют значения случайной величины, а в нижней – вероятности этих значений.

Чтобы придать ряду распределения более наглядный вид, часто прибегают к его графическому изображению – **многоугольнику распределения**. Многоугольник распределения строится следующим образом: по оси абсцисс откладывают возможные значения случайной величины x_1, x_2, x_3, ..., а по оси ординат – вероятности этих значений p_1, p_2, p_3, ... Полученные точки с координатами $(x_1, p_1), (x_2, p_2), (x_3, p_3)$, ... соединяют отрезками прямых (рис. 3.1.).

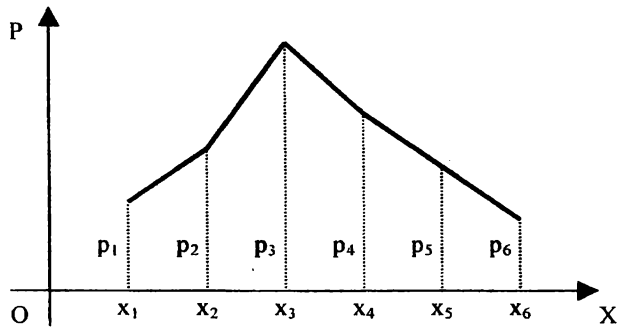


Рис. 3.1

Здесь изображен многоугольник распределения дискретной случайной величины, принимающей 6 значений.

Функция распределения любой дискретной случайной величины определяется через ряд распределения с помощью равенства $F(x) = \sum_{x_k<x} p_k$, из которого следует важнейшее свойство ряда распределения: сумма всех вероятностей, составляющих ряд распределения, равна единице:

$$\sum_k p_k = 1.$$

Исходя из определения функции распределения дискретной случайной величины, можно записать некоторые характерные свойства такой функции:

1) функция распределения дискретной случайной величины – разрывная ступенчатая функция;
2) функция распределения дискретной случайной величины возрастает скачками при тех значениях x, которые являются возможными значениями этой случайной величины;
3) величина скачков функции распределения дискретной случайной величины равна разности
$$F(x_k + 0) - F(x_k) = p_k = P\{X = x_k\};$$
4) сумма всех скачков функции распределения дискретной случайной величины равна единице.

Рассмотрим некоторые дискретные распределения, часто встречающиеся на практике.

3.2.1. Распределение Бернулли

Производится один опыт (или наблюдение), в котором может произойти или не произойти событие A. Вероятность того, что событие A произойдет равна числу p. Один такой опыт, в котором возможны лишь два исхода, называемые "успех" и "неудача", называют **испытанием Бернулли.**

Пусть случайная величина X характеризует появление события A в данном опыте, то есть

$$X = \begin{cases} 1, \text{ если событие A произошло,} \\ 0, \text{ если событие A не произошло,} \end{cases}$$

тогда

$$P\{X = 1\} = P\{A\} = p;$$
$$P\{X = 0\} = P\{\overline{A}\} = 1 - p;$$

и говорят, что случайная величина X **распределена по Бернулли.** Это кратко записывают в виде X ~ B(p).

Функция распределения такой случайной величины имеет вид (Рис. 3.2):

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0 \\ 1 - p, \text{ при } 0 < x \le 1 \\ 1, \text{ при } x > 1 \end{cases}$$

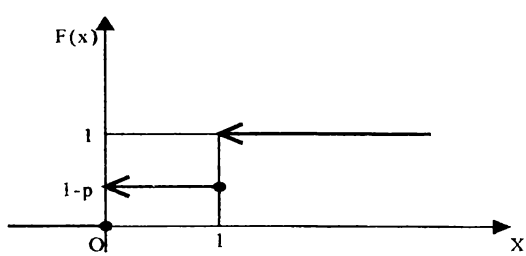


Рис. 3.2

Пример 3.1. При подбрасывании монеты может выпасть орел (X=1) или решка (X=0). Если монета однородна и симметрична, то p = 0,5.

3.2.2. Биномиальное распределение

Производится n независимых опытов, в каждом из которых может произойти (с вероятностью p) или не произойти (с вероятностью 1 – p) некоторое событие A, т.е. производится n независимых испытаний Бернулли. Повторные независимые испытания Бернулли называют **схемой Бернулли**. Схема названа в честь Я. Бернулли, доказавшего свою теорему в 1713 г., для такой последовательности испытаний.

Рассмотрим случайную величину X, равную числу "успехов" в схеме Бернулли.

Найдем вероятность P_k того, что в n испытаниях Бернулли будет k "успехов", или, что то же самое, что случайная величина X примет значение, равное k.

Рассмотрим событие B_k, состоящее в том, что X = k, т.е. событие A появится в опытах ровно k раз.

Событие B_k может осуществляться различными способами. Разложим событие B_k на сумму произведений событий, состоящих в появлении или непоявлении события A в отдельном опыте. Будем обозначать A_i появление события A в i-ом опыте; $\overline{A}_i$ – непоявление события A в i-ом опыте.

Каждый вариант появления события B_k (т.е. каждый член суммы разложения события B_k) должен состоять из k появлений события A и n – k непоявлений, т.е. из k событий A и n – k событий $\overline{A}$ с различными индексами. Таким образом,

$$B_k = A_1A_2...A_k\overline{A}_{k+1}...\overline{A}_n + ... + \overline{A}_1\overline{A}_2...\overline{A}_{n-k} \cdot A_{n-k+1}...A_n,$$

причем в каждое произведение событие A должно входить k раз, а $\overline{A}$ должно входить n – k раз.

Число всех комбинаций такого рода равно $C_k^n = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – числу способов, какими можно из n опытов выбрать k, в которых произошло событие A.

Вероятность каждой такой комбинации по теореме умножения для независимых событий, равна $p^k(1-p)^{n-k}$.

Так как комбинации между собой несовместны, то по теореме сложения, вероятность события B_k равна $p^k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

Таким образом, $P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

Эту формулу называют **формулой Бернулли**.

Случайная величина X имеет **биномиальное распределение** с параметрами p и n, если она принимает целочисленные значения от 0 до n с вероятностями $p_k = P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$,

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - биномиальный коэффициент.

Кратно это записывают в виде X ~ Bi (n, p). Построим график функции распределения в случае n = 4; p = 0,2.

Сначала запишем ряд распределения.

$$p_o = P\{X = O\} = C_4^0 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^4 = \frac{4!}{0!4!} \cdot 1 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}4096$$

$$p_1 = P\{X = 1\} = C_4^1 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^3 = \frac{4!}{1!3!} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^3 = 0{,}4096$$

$$p_2 = P\{X = 2\} = C_4^2 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^2 = \frac{4!}{2!2!} \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}64 = 0{,}1536$$

$$p_3 = P\{X = 3\} = C_4^3 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^1 = \frac{4!}{3!1!} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8 = 0{,}0256$$

$$p_4 = P\{X = 4\} = C_4^4 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^0 = \frac{4!}{4!0!} \cdot 0{,}.2^4 \cdot 1 = 0{,}0016$$

Проверим, выполнено ли основное свойство ряда распределения:

$$p_o + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}4096 + 0{,}4096 + 0{,}1536 + 0{,}0256 + 0{,}0016 = 1.$$

Основное свойство выполнено.

Теперь можно строить график функции распределения (рис. 3.3.).

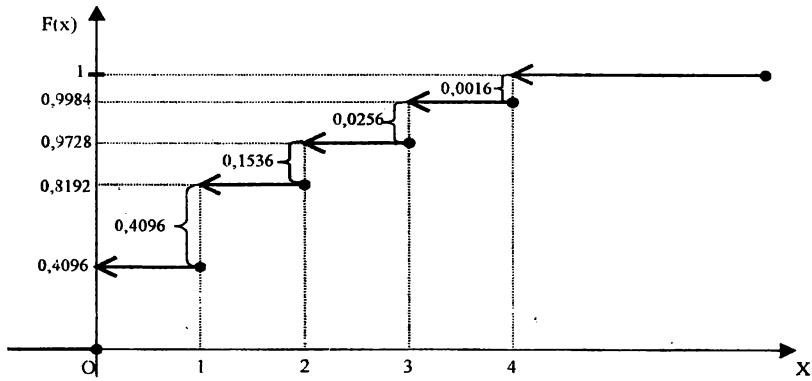


Рис. 3.3

Пример 3.2. Всхожесть семян данного сорта растений оценивается вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что из 5 посеянных зерен взойдет не меньше 4?

Решение. Обозначим X – число взошедших семян из 5 посеянных. Ясно, что X ~ Bi (5; 0,8), т.е. случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами n = 5 и p = 0,8.

Тогда

$$P\{X \geq 4\} = P\{X = 4\}$$

или

$$P\{X = 5\} = C_5^4 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2 + C_5^5 \cdot 0,8^5 = 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^5 = 0,73728.$$

Пример 3.3. Длительной проверкой качества стандартных деталей установлено, что 75% деталей не имеют дефектов. Составить биномиальное распределение числа пригодных деталей из взятых наудачу 6 деталей. Построить многоугольник распределения.

Решение. Из условия задачи X ~ Bi (6; 0,75). Составим ряд распределения:

$$p_0 = P\{X = 0\} = C_6^0 \cdot (\frac{3}{4})^0 \cdot (\frac{1}{4})^6 = \frac{1}{4096} = 0,0002$$

$$p_1 = P\{X=1\} = C_6^1 \cdot (\frac{3}{4})^1 \cdot (\frac{1}{4})^5 = 6 \cdot \frac{3}{4} \cdot (\frac{1}{4})^5 = \frac{18}{4096} = 0{,}0044$$

$$p_2 = P\{X=2\} = C_6^2 \cdot (\frac{3}{4})^2 \cdot (\frac{1}{4})^4 = 15 \cdot (\frac{3}{4})^2 \cdot (\frac{1}{4})^4 = \frac{135}{4096} = 0{,}0330$$

$$p_3 = P\{X=3\} = C_6^3 \cdot (\frac{3}{4})^3 \cdot (\frac{1}{4})^3 = 20 \cdot (\frac{3}{4})^3 \cdot (\frac{1}{4})^3 = \frac{540}{4096} = 0{,}1318$$

$$p_4 = P\{X=4\} = C_6^4 \cdot (\frac{3}{4})^4 \cdot (\frac{1}{4})^2 = 15 \cdot (\frac{3}{4})^4 \cdot (\frac{1}{4})^2 = \frac{1215}{4096} = 0{,}2966$$

$$p_5 = P\{X=5\} = C_6^5 \cdot (\frac{3}{4})^5 \cdot (\frac{1}{4})^1 = 6 \cdot (\frac{3}{4})^5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1458}{4096} = 0{,}3560$$

$$p_6 = P\{X=6\} = C_6^0 \times (\frac{3}{4})^6 \times (\frac{1}{4})^0 = 15 \times (\frac{3}{4})^6 = \frac{729}{4096} = 0{,}1780$$

Проверим выполнение основного свойства ряда распределения:

$$\sum_{k=0}^{6} p_k = 1.$$

$$\frac{1}{4096} + \frac{18}{4096} + \frac{135}{4096} + \frac{540}{4096} + \frac{1215}{4096} + \frac{1458}{4096} + \frac{729}{4096} = \frac{4096}{4096} = 1.$$

Свойство выполнено.

Построим многоугольник распределения.

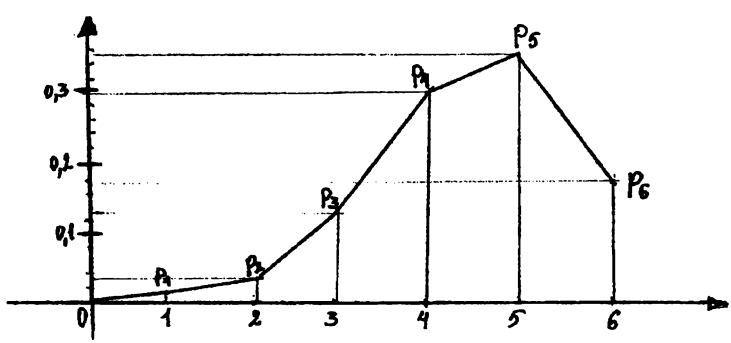


Рис.3.4

Из графика видно, что наиболее вероятным оказывается наличие пяти пригодных деталей из шести.

3.2.3. Геометрическое распределение

Рассмотрим последовательность испытаний, в каждом из которых может произойти с вероятностью p событие A ("успех"), а может и не произойти ("неудача"). Опыты продолжаются до первого появления события A.

Случайная величина X – число произведенных опытов или число испытаний Бернулли, предшествующих наступлению первого успеха. Ясно, что случайная величина X может принимать лишь значения из множества целых положительных чисел: 0, 1, 2, ... (т.е. успех может произойти при первом испытании, втором, третьем и т.д.). Найдем для $k = 0,1,2,...,$ т.е. вероятность того, что успех наступит после k-го опыта. Ясно, что событие B_k можно представить как произведение

$$B_k = A \cdot \underbrace{\overline{A} \ldots \overline{A}}_{k \text{ раз}}, \text{ т.е.}$$

$$B_0 = A;\ B_1 = A \cdot \overline{A};\ B_2 = A \cdot \overline{A} \cdot \overline{A};\ B_3 = A \cdot \overline{A} \cdot \overline{A} \cdot \overline{A} \text{ и т.д.}$$

По теореме умножения для независимых событий

$$P\{X = k\} = P(B_k) = p \cdot (1-p)^k.$$

Случайная величина X имеет **геометрическое распределение** с параметром p, если она принимает целые положительные значения k = 0, 1, 2, ... с вероятностями $p_k = P\{X = k\} = p \cdot (1-p)^k$. Кратко это записывают в виде X ~ G(p).

Вероятности p_k образуют геометрическую прогрессию, отсюда и название "геометрическое распределение".

Просуммировав бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, легко убедиться в том, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} p \cdot (1-p)^k = \frac{p}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1.$$

Пример 3.4. Найти вероятность того, что при подбрасывании симметричной игральной кости шестерка первый раз появится при третьем подбрасывании.

Решение. Обозначим X – число подбрасываний игральной кости

до первого появления шестерки. Ясно, что $X \sim G(\frac{1}{6})$.

Искомая вероятность – это вероятность того, что случайная величина X примет значение, равное двум, т.е.

$$p = P\{X = 2\} = \frac{1}{6} \cdot (\frac{5}{6})^2 = \frac{25}{216}.$$

Пример 3.5. Симметричную монету подбрасывают до первого появления орла. Найти вероятность того, что первый раз орел выпадет при пятом подбрасывании.

Решение. Обозначим X – число подбрасываний монеты до первого появления орла.

В силу симметричности монеты $X \sim G(\frac{1}{2})$.

Искомая вероятность – это вероятность того, что случайная величина X примет значение, равное четырем, т.е.

$$p = P\{X = 4\} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}.$$

3.2.4. Гипергеометрическое распределение

Многие задачи комбинаторики могут быть сведены к следующей модели. В генеральной совокупности из N элементов имеется M элементов красного цвета и N – M элементов черного цвета. Случайным образом выбирается группа из n элементов.

Случайная величина X – число элементов красного цвета среди отобранных n элементов. Ясно, что случайная величина X может принимать любые целые значения от 0 до наименьшего из чисел $\{n, M\}$.

Найдем вероятность $p_m = P\{X = m\}$ – вероятность того, что случайная величина X приняла значение, равное m, или что среди отобранных n элементов ровно m красных.

Для того, чтобы найти p_m, заметим, что выбранная группа состоит из m красных и n – m черных элементов. Красные элементы могут быть выбраны C_n^m различными способами, а черные C_{N-M}^{n-m} способами. Так как любой выбор красных элементов может комбинироваться с любым выбором черных, имеем

$$P_m = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Определенный таким образом набор вероятностей называется гипергеометрическим распределением.

Случайная величина X имеет **гипергеометрическое распределение**, если она принимает целые значения $m = 0, 1, 2, \ldots, \min\{n, M\}$ с вероятностями

$$P_m = P\{X = m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

Пример 3.6. Пусть в партии из N изделий M изделий 1-го сорта. Из этой партии извлекаются для контроля n изделий. Закон распределения случайной величины X – числа изделий 1-го сорта среди выбранных n изделий – имеет гипергеометрическое распределение.

Пример 3.7. В комитете каждый из 50 американских штатов представлен двумя сенаторами. Найти вероятность того, что в комитете из 50 случайно выбранных сенаторов представлен данный штат.

Решение. Обозначим X – число сенаторов в комитете, представляющих данный штат. Из условия задачи следует, что N = 100 сенаторов, M = 2 сенатора, представляющих данный штат, n = 50 – число сенаторов в комитете.

Данный штат будет представлен в комитете, если X = 1 или X = 2, т.е. искомая вероятность P равна

$$P(X=1) + P(X=2) = \frac{C_2^1 C_{98}^{49}}{C_{100}^{50}} + \frac{C_2^2 C_{98}^{48}}{C_{100}^{50}} = \frac{50}{99} + \frac{50 \cdot 49}{100 \cdot 99} \approx 0{,}752525.$$

3.2.5. Распределение Пуассона

Случайная величина X имеет **распределение Пуассона** с параметром $\lambda (\lambda > 0)$, если эта величина принимает значения k = 0, 1, 2, ... с вероятностями $p_k = P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-k}$. Кратко это записывают в виде $X \sim П(\lambda)$. Распределение Пуассона впервые было рассмотрено С. Пуассоном в 1837 г.

Распределение Пуассона иногда называют законом редких событий, так как вероятности $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ дают приближенное распределение числа наступлений некоторого маловероятного (редкого) события при большом числе независимых испытаний. В этом случае полагают $\lambda = n \cdot p$, где n – число испытаний Бернулли, p – вероятность осуществления события в одном испытании.

Правомерность использования закона Пуассона вместо биномиального распределения при большом числе испытаний дает следующая теорема.

Теорема Пуассона. Если в схеме Бернулли $n \to \infty; p \to 0$, так что $n \cdot p \to \lambda$ (конечному числу), то

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{при любых } k,\ k = 0,1,2,\ldots$$

Доказательство: Обозначим $\lambda_n = n \cdot p$, тогда $p = \frac{\lambda_n}{n}$. По условию теоремы, $\lambda_n \to \lambda$ при $n \to \infty$. Представим биномиальную вероятность в виде $C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n \cdot (n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!} (\frac{\lambda_n}{n})^k (1-\frac{\lambda_n}{n})^{n-k} =$

$$= \frac{\lambda_n^k}{k!} (1-\frac{\lambda_n}{n})^n (1-\frac{\lambda_n}{n})^{-k} (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n}).$$

При $n \to \infty$ имеем

$$\lambda_n^m \to \lambda^m;\ (1-\frac{\lambda_n}{n})^n \to e^{-\lambda};\ (1-\frac{\lambda_n}{n})^{-k} \to 1.$$

$$(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n}) \to 1.$$

Отсюда получаем утверждение теоремы

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Пример 3.8. *Столетние старики*. Каждый отдельный человек в момент рождения имеет мало шансов прожить 100 лет, т.е. вероятность p такого события достаточно мала. Продолжительность жизни отдельных людей в достаточно большом обществе в первом приближении можно считать стохастически независимыми и можно сравнить n рождений с n независимыми испытаниями, в которых успехом (осуществлением события) является смерть после 100 прожитых лет. В устойчивом обществе, где ни его размеры, ни уровень смертности существенно не изменяются, естественно ожидать, что частота лет, когда умирают ровно k столетних стариков приблизительно равна $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, где параметр λ зависит от размера общества (n) и от состояния здоровья его членов (p). Данные по Швейцарии подтверждают этот вывод.

Пример 3.9. *Опечатки*. Если при наборе книги существует постоянная вероятность того, что любая буква будет набрана неправильно, и если условия набора остаются неизменными, то мы имеем столько испытаний Бернулли, сколько букв в книге. Тогда вероятность того, что определенная страница содержит ровно k опечаток будет приближенно равна $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, где λ – характеристика наборщика. Возможная усталость наборщика, трудные места текста и т.п. увеличивают вероятность ошибки и могут приводить к увеличению количества опечаток. Таким образом, распределение Пуассона можно использовать для обнаружения существенных отклонений от нормы или от требований статистического контроля.

Пример 3.10. *Дни рождения*. На факультете учатся 500 студентов. Найти вероятность того, что первое сентября является днем рождения трех студентов.

Решение. Пусть X – число студентов факультета, родившихся первого сентября. Тогда искомая вероятность – это вероятность того, что случайная величина X примет значение, равное трем.

В данной задаче можно применить схему Бернулли с n = 500 и $p = \frac{1}{365}$. Для применения теоремы Пуассона положим $\lambda = \frac{500}{365} \approx 1{,}37$.

Тогда искомая вероятность $P=\frac{(1,37)^3}{3!}e^{-1,37}\approx 0,11.$

Пример 3.11. Вероятность появления бракованного изделия при массовом производстве равна 0,002. Найти вероятность того, что в партии из 1500 изделий будет не более трех бракованных.

Решение. Пусть X – число бракованных изделий в партии из 1500 изделий.

Тогда искомая вероятность – это вероятность того, что случайная величина X не превышает трех.

В данной задаче применима схема Бернулли с $n=1500$ и $p=0,002$. Для применения теоремы Пуассона положим $\lambda=1500\cdot 0,002=3$. Тогда искомая вероятность

$$P=e^{-3}(1+\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!})=\frac{13}{e^3}\approx 0,65.$$

Пример 3.12. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение одной минуты абонент позвонит на коммутатор, равна 0,01.

Найти вероятность того, что в течение одной минуты никто не позвонит.

Решение. Пусть X – число позвонивших абонентов в течение одной минуты. Тогда искомая вероятность – это вероятность того, что случайная величина X примет значение, равное нулю. В данной задаче применима схема Бернулли с n = 100 и p = 0,01. Для применения теоремы Пуассона положим $\lambda=100\cdot 0,01=1$. Тогда искомая вероятность $P=e^{-1}\approx 0,37$.

3.3. Непрерывные случайные величины

Непрерывные случайные величины – это величины, возможные значения которых образуют некоторый конечный или бесконечный интервал.

Функция распределения непрерывной случайной величины везде непрерывна.

Из последнего положения следует, что вероятность любого

отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю.

Остановимся на последнем утверждении подробнее.

Событие X = a, состоящее в том, что непрерывная случайная величина примет значение a, возможно; однако его вероятность равна нулю. Такие события – возможные, но с нулевой вероятностью – появляются только в том случае, когда пространство элементарных исходов не является конечным или счетным. При непрерывном распределении вероятность попадания на сколь угодно малый участок может быть отлична от нуля.

Пусть имеется непрерывная случайная величина X с функцией распределения F(x), которая непрерывна и дифференцируема.

Вычислим вероятность попадания случайной величины X на участок от x до $x+\Delta x$: $P(x < X < x+\Delta x) = F(x+\Delta x) - F(x)$.

Рассмотрим отношение этой вероятности к длине участка, т.е. среднюю вероятность. Устремим Δx к нулю, тогда в пределе получим производную от функции распределения

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x).$$

Функцию f(x) называют **плотностью распределения** случайной величины X.

Кривая, изображающая плотность распределения случайной величины называется кривой распределения. Т.е. **кривая распределения** – график плотности распределений.

Используя формулу Ньютона-Лейбница и вычисление вероятности попадания случайной величины на заданный интервал (a, b), можно записать вероятность попадания случайной величины X на (a, b) через плотность распределения: $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$.

Так как вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю, то можно рассматривать здесь интервал (a, b), не включая в него левый конец (a, b).

По теореме Барроу можно выразить функцию распределения случайной величины через ее плотность распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Геометрически F(x) представляет собой площадь под кривой распределения, лежащую левее точки x (рис. 3.4.).

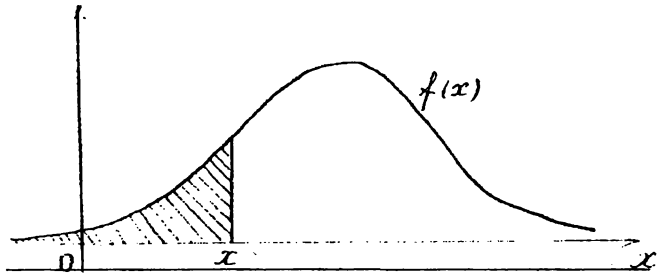


Рис. 3.4

Основные свойства плотности распределения:

1) Плотность распределения является неотрицательной функцией: $f(x) \geq 0$ для любого x.

Это свойство следует из того, что функция распределения F(x) – неубывающая функция.

2) Интеграл от минус до плюс бесконечности от плотности распределения равен 1: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Это свойство следует из того, что $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ и $F(+\infty) = 1$.

Рассмотрим некоторые конкретные непрерывные распределения, часто встречающиеся на практике.

3.3.1. Равномерное распределение

Понятие равномерного распределения соответствует представлению о выборе точки из определенного отрезка наудачу.

Случайная величина X **распределена равномерно на отрезке (a, b)**, если ее плотность постоянна и равна

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a,b] \\ 0, & \text{если } x \notin [a,b] \end{cases}$$

Кратко это записывают в виде X ~ R (a, b).

Из-за внешнего вида графиков плотности равномерные распределения называют "прямоугольными" (рис. 3.5.).

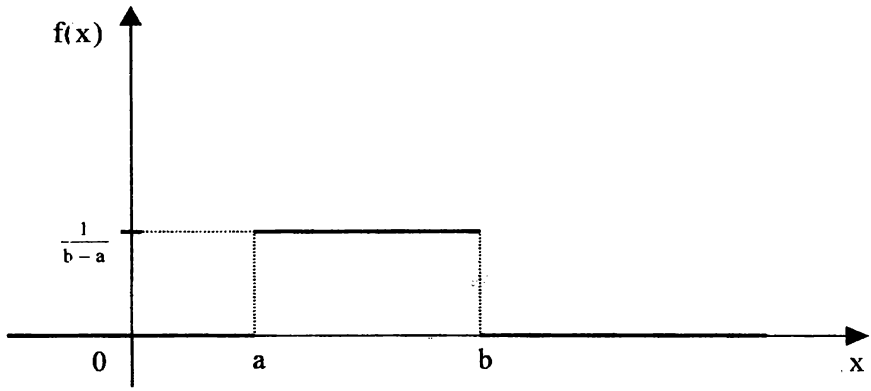


Рис. 3.5

При равномерном распределении отрезок [a, b] становится выборочным пространством, в котором вероятности интервалов, лежащих внутри [a, b], пропорциональны их длинам:

$$P\{x < X < x + \Delta x\} = \int_{x}^{x+\Delta x} \frac{1}{b-a} dt = \frac{\Delta}{b-a},$$

если $(x, x + \Delta x) \in [a, b]$.

Убедимся, что интеграл от минус до плюс бесконечности от плотности равномерного распределения равен 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} dx = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Функция распределения случайной величины, равномерно распределенной на [a, b], имеет вид (рис. 3.6):

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{ при } a < x \le b \\ 1, \text{ при } x > b \end{cases}.$$

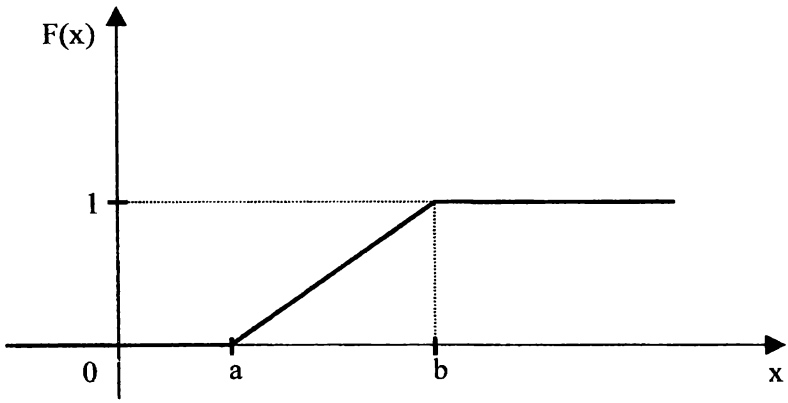


Рис. 3.6

Пример 3.13. Время ожидания пассажира, прибывшего на автобусную остановку без учета расписания, можно рассматривать как случайную величину, равномерно распределенную в интервале между последовательными отъездами автобусов.

Пример 3.14. Интервал времени между отправлениями поездов в метрополитене равен 3 мин.

Найти вероятность того, что человек, пришедший на станцию метро в случайный момент времени, будет ждать не более одной минуты.

Решение. Время ожидания поезда метрополитена можно считать случайной величиной, имеющей равномерное распределение на отрезке [0, 3].

Вероятность того, что человек будет ждать не более одной минуты, равна значению функции распределения в точке x=1, т.е. $P = F(1) = \frac{1}{3}$.

3.3.2. Показательное распределение

Непрерывная случайная величина X, принимающая неотрицательные значения, имеет **показательное (экспоненциальное) распределение** с параметром λ, если плотность распределения имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0\\ 0, & \text{при } x<0\end{cases}.$$

Кратко это записывают в виде $X \sim E(\lambda)$.

Функция распределения такой случайной величины (рис.3.7)

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & \text{при } x>0\\ 0, & \text{при } x \leq 0\end{cases}.$$

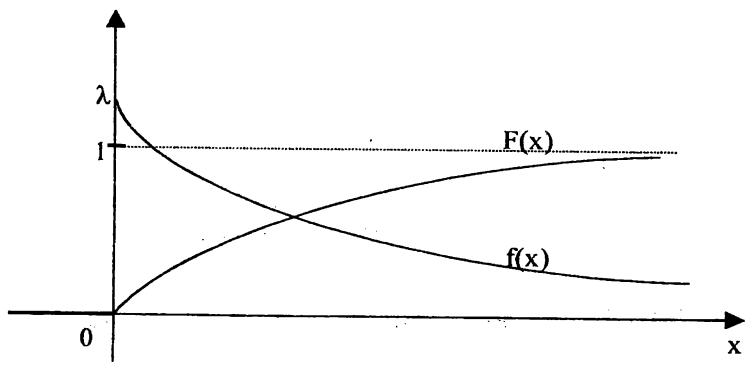


Рис. 3.7

Показательное распределение – единственное наделенное "полной потерей памяти". Это свойство называют также свойством отсутствия последействия.

Аналитически это свойство записывают следующим образом: для любых чисел x_1 и x_2

$$P\{X > x_1 + x_2\} = P\{X > x_1\} \cdot P\{X > x_2\}.$$

Считают, что время жизни атома имеет показательное распределение. Свойство отсутствия последействия имеет следующий смысл: каков бы ни был настоящий возраст, оставшееся время жизни не зависит от прошлого и имеет то же самое распределение, что и само время жизни.

Покажем, что показательное распределение удовлетворяет свойству отсутствия последействия, для этого запишем вероятности через функции распределения.

$$P\{X>x_1\}=1-F(x_1)=e^{-\lambda x_1};$$

$$P\{X>x_2\}=1-F(x_2)=e^{-\lambda x_2};$$

$$P\{X>x_1+x_2\}=1-F(x_1+x_2)=e^{-\lambda(x_1+x_2)}.$$

Тогда

$$P\{X>x_1\}\times P\{X>x_2\}=e^{-\lambda x_1}\times e^{-\lambda x_2}=e^{-\lambda(x_1+x_2)}=P\{X>x_1+x_2\}.$$

Использование показательного распределения в математических моделях реальных явлений обычно связано именно с этим характерным свойством.

Пример 3.15. Время обслуживания клиента на станции технического обслуживания имеет показательное распределение, причем чем дольше обслуживают в среднем каждого клиента, тем меньше значение параметра λ.

В теории вероятностей широко используют обобщения показательного распределения: распределения Вейбулла и гамма-распределения.

Распределение Вейбулла с параметром $\alpha(\alpha>0)$ - это непрерывное распределение с плотностью

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}e^{-x^{\alpha}}, & \text{при } x\geq 0\\ 0, & \text{при } x<0\end{cases}$$

Здесь $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция.

Гамма-функция – это функция вида $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$

Гамма-функция интерполирует факториалы в том смысле, что $\Gamma(n+1)=n!$ для $n=0,1,2,\ldots$; также имеет место соотношение $\Gamma(t)=(t-1)\Gamma(t-1)$.

Множитель $\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ в выражении для плотности распределения Вейбулла является нормировочным, этот множитель необходим для того, чтобы было выполнено условие нормировки: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Распределение Вейбулла широко используют в теории надежности.

Если значение параметра **a** распределения Вейбулла равно 1, то плотность распределения Вейбулла совпадает с плотностью показательного распределения.

Гамма-распределение широко используется в математической статистике.

Гамма-распределение с параметрами a и b – это непрерывное распределение с плотностью

$$f(x)=\begin{cases}\frac{a^b}{\Gamma(b)}x^{b-1}e^{-ax}, & \text{при} \quad x \geq 0\\ 0, & \text{при} \quad x<0\end{cases}$$

Здесь a > 0 – масштабный параметр,
b > 0 – существенный параметр.

При b = 1 плотность гамма-распределения совпадает с плотностью показательного распределения.

Множитель $\frac{a^b}{\Gamma(b)}$ в выражении для плотности гамма-распределения является нормировочным, он необходим для того, чтобы было выполнено условие нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

В теории очередей гамма-распределение иногда называют распределением Эрланга.

Подробнее о гамма-распределении будет сказано в Юните 2.

3.3.3. Распределение Коши

Распределение Коши – это непрерывное распределение вероятностей с плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+(x-\mu)^2},$$

где μ – параметр распределения.

То, что случайная величина X имеет распределение Коши с параметром μ, кратко записывают в виде $X \sim K(\mu)$.

Распределение Коши впервые было рассмотрено О. Коши в 1853 г.

Кривая распределения Коши показана на рисунке. 3.8.

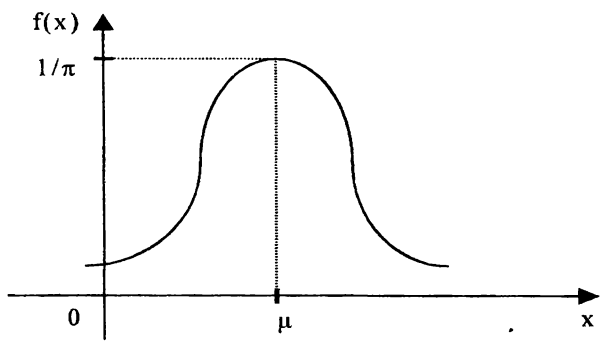


Рис. 3.8

Кривая распределения симметрична относительно прямой $x=\mu$.

Коэффициент $\frac{1}{\pi}$ в выражении для плотности распределения Коши является нормировочным, он необходим для того, чтобы $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$.

Распределение Коши используют в математической статистике.

3.3.4. Нормальное распределение

Непрерывная случайная величина X имеет **нормальное распределение** с параметрами m и $\sigma > 0$, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Если случайная величина X имеет нормальное распределение с указанными параметрами, это кратко записывают в виде $X \sim N(m, \sigma)$

Множитель $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ в выражении для плотности необходим для того, чтобы $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, т.е. множитель является нормировочным.

Нормальный закон распределения (также называемый законом Гаусса) играет исключительную роль в теории вероятностей и занимает среди других законов распределения особое положение. Это наиболее часто встречающийся на практике закон распределения. Главная особенность, выделяющая нормальный закон среди других законов распределения, состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях. Теоремы, устанавливающие нормальный закон как предельный, будут рассмотрены в дальнейшем. Нормальный закон может появляться как точное решение некоторых задач (в рамках принятой математической модели исследуемого явления). Классические примеры возникновения нормального распределения как точного принадлежат К. Гауссу (закон распределения ошибок наблюдения) и Дж. Максвеллу (закон распределения скоростей молекул).

Выясним смысл параметров нормального распределения.

Параметр m является центром симметрии распределения. Это ясно из того, что при изменении знака разности (x – m) на обратный выражение для плотности нормального распределения не меняется. Если изменять значения параметра m, то кривая распределения будет смещаться вдоль оси абсцисс, не изменяя своей формы. Таким образом, центр рассеивания характеризует положение распределения на оси абсцисс (рис. 3.9).

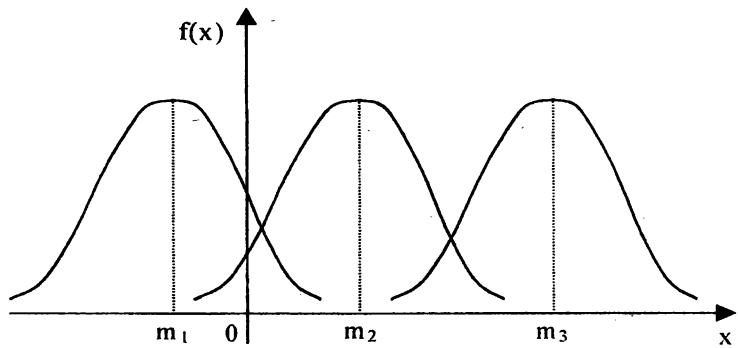


Рис. 3.9

Параметр σ характеризует форму кривой распределения. Наибольшая ордината кривой распределения обратно пропорциональна σ; при увеличении σ максимальная ордината уменьшается. Так как площадь кривой распределения всегда должна оставаться равной единице, то при увеличении σ кривая распределения становится более плоской, растягиваясь вдоль оси абсцисс. При уменьшении σ кривая распределения вытягивается вверх, одновременно сжимаясь с боков, становясь более иглообразной. На рис. 3.10 показаны три нормальные кривые (I, II, III) при m = 0; кривая I соответствует самому большому, в кривая III самому малому значению σ.

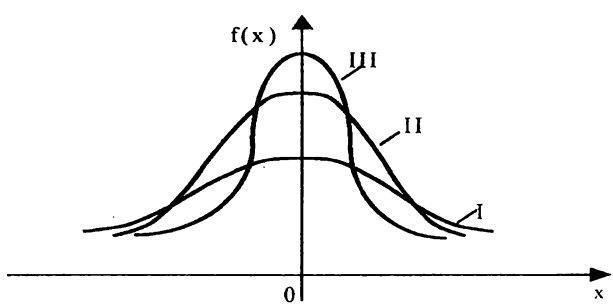


Рис. 3.10

Во многих задачах, связанных с нормально распределенными случайными величинами, приходится определять вероятность попадания случайной величины X, подчиненной нормальному закону с параметрами m, σ, на участок (a, b).

Как уже известно, вероятность попадания случайной величины на заданный интервал выражается через плотность распределения

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \frac{1}{\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Последний интеграл не выражается через элементарные функции. Упростим сначала подинтегральное выражение, сделав замену переменных $\frac{x-m}{\sigma}=t$, тогда пределы интегрирования поменяются на

$$\alpha=\frac{a-m}{\sigma};\ \beta=\frac{b-m}{\sigma}.$$

Итак, $P(a<X<b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-t^2/2}dt=\Phi^*(\beta)-\Phi^*(\alpha)$,

где $\Phi^*(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$ – функция распределения нормального распределения с параметрами 0 и 1. Эта функция затабулирована. В файле материалов приведены таблицы значений функции Ф*(x).

Пример 3.16. Случайная величина X представляет собой ошибку измерения некоторого расстояния. Известно, что X ~ N (1,2; 0,8), где значения параметров даны в метрах. Найти вероятность того, что отклонение измеренного значения от истинного не превзойдет по абсолютной величине 1,6 м.

Решение. В данном примере a = –1,6; b = 1,6; m = 1,2; σ = 0,8.

Тогда $\alpha=\frac{a-m}{\sigma}=\frac{-1{,}6-1{,}2}{0{,}8}=-3{,}5;$

$$\beta=\frac{b-m}{\sigma}=\frac{1{,}6-1{,}2}{0{,}8}=0{,}5.$$

По таблице функции Ф*(x) находим

$$\Phi^*(0,5) = 0,6915;\ \Phi^*(-3,5) = 0,0002.$$

Таким образом,

$$P(-1,6 < X < 1,6) = \Phi^*(0,5) - \Phi^*(-3,5) = 0,6915 - 0,0002 = 0,6913.$$

На практике часто встречается задача вычисления вероятности попадания нормально распределенной случайной величины на участок, симметричный относительно параметра m.

Такую вероятность вычисляют по формуле

$$P(|X - m| < e) = 2\Phi^*\left(\frac{e}{\sigma}\right) - 1.$$

Часто на практике требуется оценить диапазон возможных значений случайной величины. Способ, позволяющий ориентировочно указать интервал практически возможных значений нормально распределенной случайной величины, называют **"правилом трех сигма"**. Рассмотрим вероятность того, что случайная величина отклоняется от параметра m не больше, чем на 3σ, т.е.

$$P(|X - m| < 3\sigma) = 2\Phi^*\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) - 1 = 2\Phi^*(3) - 1.$$

Найдем по таблице значение Ф*(3) = 0,9986,

тогда $P(|X - m| < 3\sigma) = 2 \cdot 0,9986 - 1 = 0,9972.$

Т.е. вероятность того, что случайная величина отличается от своего m больше чем на 3σ, не превосходит 0,003.

Итак, интервал практически возможных значений нормально распределенной случайной величины равен $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$, где m, σ – параметры нормального распределения.

Пример 3.17. Ошибка взвешивания – случайная величина, X ~ N (0,5), значения параметров даны в граммах. Найти интервал практически возможных значений ошибки взвешивания.

Решение. В данной задаче m = 0, σ = 5, следовательно, интервал практически возможных значений равен (–15 г, 15 г).

В некоторых задачах используют **"правило двух сигма"**: $P(|X - m| < 2\sigma) = 0,95$, т.е. с вероятностью 0,95 нормально распределенная случайная величина X принадлежат интервалу (m – 2σ, m + 2σ), где m и σ –

параметры распределения.

3.3.5. Распределение Пирсона

Распределение Пирсона с параметрами a, b_0, b_1, b_2 – непрерывное распределение, плотность которого $y = f(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} \cdot y,$$

где a, b_0, b_1, b_2 – действительные числа.

Кривые распределения Пирсона называют кривыми Пирсона.

Распределения Пирсона классифицированы в зависимости от значений параметров a, b_0, b_1, b_2 и области изменения x. Семейство распределений Пирсона образуют 12 типов и нормальное распределение. Примерами распределений Пирсона являются распределение Стьюдента и хи-квадрат распределение, широко используемые в математической статистике.

Распределения Пирсона используют для описания часто встречающихся на практике распределений.

Впервые распределения Пирсона были применены в 1894 году для приближенного представления эмпирических распределений К. Пирсоном.

3.4. Функции от случайной величины. Логарифмически нормальное распределение

Иногда на практике возникает необходимость в определении законов распределения функций от случайной величины или функций случайного аргумента.

Функция случайного аргумента $Y = g(X)$ – это случайная величина, функционально зависящая от другой случайной величины, область значения которой есть область значений функции $y = g(x)$.

Начнем с самой простой функции – линейной.

Если X - случайная величина, подчиненная нормальному закону с параметрами m_x и σ_x, а $Y = aX + b$, то случайная величина Y также подчинена нормальному закону с параметрами

$$m_Y = a \cdot m_x + b; \sigma_Y = |a| \cdot \sigma_x$$

Действительно, пусть $X \sim N(m_x, \sigma_x)$; $Y = aX + b$.

Тогда функция распределения случайной величины Y

$$F_Y(x) = P\{Y < x\} = P\{aX + b < x\} = P\left\{X < \frac{x-b}{a}\right\},\ \text{если } a > 0.$$

Откуда плотность распределения случайной величины Y

$$f_Y(x) = F'_x(\frac{x-b}{a}) = f(x)(\frac{x-b}{a})\cdot\frac{1}{a}.$$

Если $a < 0$, то

$$F_Y(x) = P\{aX + b < x\} = P\left\{X > \frac{x-b}{a}\right\} = 1 - P\left\{X \le \frac{x-b}{a}\right\} = 1 - F_x(\frac{x-b}{a}).$$

Откуда $f_Y(x) = (1 - F_x(\frac{x-b}{a}))' = -f_x(\frac{x-b}{a})\cdot\frac{1}{a} = f_x(\frac{x-b}{a})\cdot\frac{1}{|a|}$.

Итак, для любого $a \neq 0$

$$f_Y(x) = f_x(\frac{x-b}{a})\cdot\frac{1}{|a|}.$$

Таким образом,

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\cdot|a|}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{x-b}{a} - m_x\right)^2}{\sigma_x^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\cdot|a|}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x - [a\cdot m_{x+b}])^2}{\sigma_x^2 a^2}\right\},$$

т.е. $Y \sim N\ (a\cdot m_x + b;\ |a|\cdot\sigma_x)$.

Итак, доказано следующее утверждение: **линейная функция от аргумента, подчиненного нормальному закону** Y = aX + b – это случайная величина, также подчиненная нормальному закону, с параметрами $m_Y = a\cdot m_x + \sigma$; $\sigma_Y = |a|\cdot\sigma_x$, где m_x, σ_x – параметры случайной величины X.

Пример 3.18. Если $a = \frac{1}{\sigma_x}$, а $b = \frac{-m_x}{\sigma_x}$, т.е. если $Y = \frac{X - m_x}{\sigma_x}$, то

$Y = \frac{X - m_x}{\sigma_x} \sim N(0,1)$ имеет нормальное распределение с параметрами 0 и 1.

При построении вероятностных моделей встречаются законы распределения случайных величин, представляющих собой нелинейные функции от нормальных случайных величин. В частности, при решении различных экономических, биологических, геометрических, физических задач используют логарифмически нормальное распределение.

Неотрицательная случайная величина Y имеет **логарифмически нормальное распределение**, если $X = \ln Y$ имеет нормальное распределение.

Из определения вытекает, что если Y имеет логарифмически нормальное распределение, то она может быть представлена в виде $Y = e^X$, где $X \sim N(m, \sigma)$.

Плотность логарифмически нормального распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma \cdot x} \cdot e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}}, & \text{при } x > 0 \\ 0, & \text{при } x \le 0 \end{cases},$$

где m, σ – параметры (σ > 0). График плотности представлен на рис. 3.11.

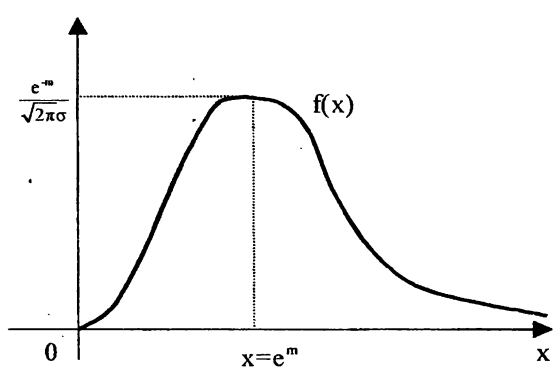


Рис. 3.11

Пример 3.19. Записать плотность распределения случайной величины $Y=e^x$, если $X \sim N(0,1)$.

Решение: Значение параметров $m = 0$, $\sigma = 1$, поэтому плотность случайной величины Y, имеющей логарифмически нормальное распределение, равна

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot x}\cdot e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2}, & \text{при } x>0\\ 0, & \text{при } x\le 0\end{cases}$$

4. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

4.1. Математическое ожидание случайной величины

В предыдущей главе мы познакомились с исчерпывающими характеристиками случайных величин.

Для дискретной случайной величины это:

а) функция распределения;

б) ряд распределения (графически – многоугольник распределения).

Для непрерывной случайной величины это:

а) функция распределения;

б) плотность распределения (графически – кривая распределения).

Однако во многих вопросах практики нет необходимости характеризовать случайную величину полностью. Зачастую достаточно указать только отдельные числовые параметры, характеризующие основные черты распределения случайной величины: например, какое-то среднее значение, около которого группируются возможные значения случайной величины; какое-либо число, характеризующее степень разбросанности этих значений относительно среднего. Пользуясь такими характеристиками, все существенные сведения относительно случайной величины можно выразить наиболее компактно. Такие характеристики называются числовыми характеристиками случайной величины.

В теории вероятностей числовые характеристики и операции с ними играют большую роль. Часто удается решить задачу до конца, оставляя в стороне законы распределения и используя только числовые характеристики.

Среднее значение случайной величины – некоторое число, являющееся как бы ее "представителем" и заменяющее ее при грубо

ориентировочных расчетах. Когда говорят "средняя продолжительность жизни в России равна 60 годам" или "средняя заработная плата в городе N равна 1 000 руб.", то этим указывают определенную числовую характеристику случайной величины, описывающую ее местоположение на числовой оси, т.е. характеристику положения.

Из характеристик положения в теории вероятностей важнейшую роль играет математическое ожидание (или среднее значение) случайной величины.

Рассмотрим дискретную случайную величину X, имеющую возможность значения $x_1, x_2, ..., x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на вероятности этих значений:

$$MX = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k .$$

Для непрерывной случайной величины X с плотностью f(x) математическое ожидание выражается уже не суммой, а интегралом.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины называется интеграл

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx,$$

где f(x) – плотность распределения величины X.

Все вышесказанное о математическом ожидании можно объединить в следующем определении.

Математическое ожидание случайной величины – это характеристика положения случайной величины на числовой оси, определяемая по формуле

$$MX = \begin{cases} \sum\limits_{k} x_k p_k, \text{ если } X - \text{дискретна} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx, \text{ если } X - \text{непрерывна} \end{cases}$$

Заметим, что математическое ожидание существует не для всех случайных величин, так как сумма и интеграл в определении математического ожидания должны сходиться абсолютно. В частности, математическое ожидание распределения Коши не существует. Вычислим математические ожидания различных распределений.

Математическое ожидание случайной величины X, имеющей распределение Бернулли:

$$X=\begin{cases}1, & \text{с вероятностью } p\\ 0, & \text{с вероятностью } 1\text{-}p\end{cases},$$

тогда $MX = 1 - p + 0 \cdot (1 - p) = p$.

Математическое ожидание случайной величины, имеющей биномиальное распределение с параметрами n и p:

$$MX = \sum_{k=0}^{n} x_k p_k = \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= n \cdot p \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k}.$$

Последняя сумма равна 1, так как состоит из ряда распределения $Bi(n-1, p)$, поэтому $MX = np$, если $X \sim Bi(n, p)$.

Математическое ожидание случайной величины, имеющей геометрическое распределение с параметром p:

$$MX = \sum_{k} x_k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot (1-p)^{k-1} = (1-p) \cdot p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} =$$

$$= (1-p)\, p(1 + 2 \cdot (1-p) + 3(1-p)^2 + \ldots) = \frac{(1-p) \cdot p}{(1-(1-p))^2} = \frac{(1-p) \cdot p}{p^2} = \frac{1-p}{p}.$$

В скобках стоит производная геометрической прогрессии со знаменателем (1 – p).

Итак, если $X \sim G(p)$, то $MX = \frac{1-p}{p}$.

Математическое ожидание случайной величины, имеющей распределение Пуассона с параметром λ:

$$MX = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

Таким образом, если X ~ П (λ), то $MX = \lambda$.

Математическое ожидание случайной величины, имеющей равномерное распределение на отрезке [a, b]:

По формуле для математического ожидания непрерывной случайной величины имеем

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{(b-a)\cdot(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Итак, если X ~ R (a, b), то $MX = \frac{a+b}{2}$.

Математическое ожидание случайной величины, имеющей показательное распределение с параметром λ:

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{0}^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}dx = \left|\text{интегрируем по частям}\right| =$$

$$= -x \cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Итак, если X ~ E (λ), то $MX = \frac{1}{\lambda}$.

Математическое ожидание случайной величины, имеющей нормальное распределение с параметрами m и σ:

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Заменой $z = \frac{x-m}{\sigma}$ приведем вычисляемый интеграл к виду

$$MX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma \times z + m) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Так как $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$ и $\int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} = 0$, то $MX = m$.

Таким образом, если X ~ N (m, σ), то MX = m.

Рассмотрим основные свойства математического ожидания.

Теорема (математическое ожидание постоянной): математическое ожидание постоянной равно этой постоянной, т.е. если C – постоянная, то

$$MC = C.$$

Доказательство: постоянную величину C можно рассматривать как случайную величину, принимающую с вероятностью 1 значение C. Тогда по формуле для математического ожидания дискретной случайной величины

$$MC = C \cdot 1 = C.$$

Теорема (математическое ожидание произведения случайной величины и постоянной): постоянную величину можно выносить за знак математического ожидания, т.е.

$$M(C \cdot X) = C \cdot MX,$$

если X – случайная величина, а C – постоянная.

По первым двум свойствам математического ожидания можно вычислить данную характеристику для любой линейной функции от случайной величины, в частности, если $MX = m$, то $M(aX + b) = am + b$.

Теорема (математическое ожидание функции от случайной величины): математическое ожидание функции $Y = g(X)$ от случайной величины X вычисляется по формуле

$$MY = M(g(X)) \begin{cases} \sum_k g(x_k) \cdot p_k, \text{если } X - \text{дискретна}, \\ \int g(x) \cdot f(x) dx, \text{если } X - \text{непрерывна}, \end{cases}$$

где $\{p_k\}$ – ряд распределения дискретной случайной величины,
f(x) – плотность распределения непрерывной случайной величины.

Используя это свойство, нетрудно вычислить математическое ожидание логарифмически нормального распределения

$$MX = \exp\left\{m + \frac{\sigma^2}{2}\right\}.$$

4.2. Медиана и мода случайной величины

Кроме важнейшей из характеристик положения – математического ожидания – на практике применяются и другие характеристики положения, в частности, мода и медиана случайной величины. **Модой случайной величины** называется ее наиболее вероятное значение. Термин "наиболее вероятное значение", строго говоря, применим только к дискретным величинам; для непрерывной величины модой является то значение, в котором плотность вероятности максимальна. На рис. 4.1. показана мода ($\mathcal{M}$) для дискретной и непрерывной случайных величин.

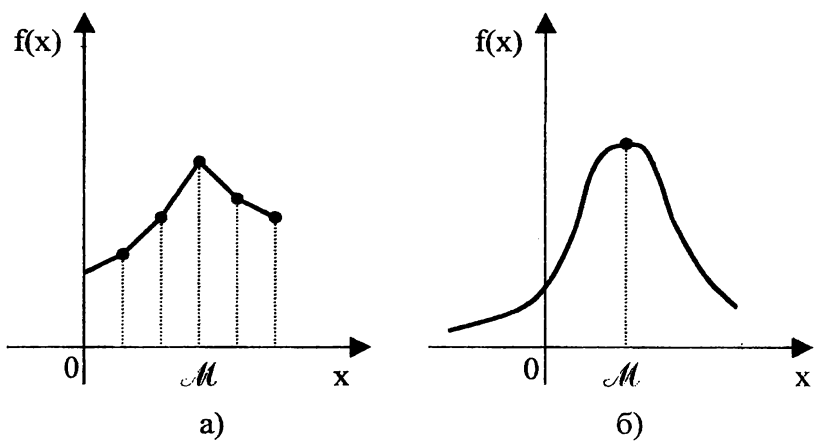


Рис. 4.1

Если многоугольник распределения или кривая распределения имеют более одного максимума, то распределение называют полимодальным. Если же многоугольник распределения или кривая распределения имеют ровно один максимум, то распределение называют унимодальным.

Например, распределение Коши с параметром μ унимодально, и мода равна μ-значению параметра.

В общем случае мода и математическое ожидание случайной величины не совпадают. В частном случае, когда распределение является симметричным, существуют мода и математическое ожидание, то они совпадают друг с другом и с центром симметрии распределения.

Например, у нормального распределения с параметрами m и σ мода равна математическому ожиданию и равна значению параметра m.

Совпадают мода и математическое ожидание у биномиального распределения с параметрами n и $\frac{1}{2}$, если n – четно. В этом случае

$$MX = \mu = \frac{n}{2}.$$

Для непрерывных случайных величин часто применяют еще одну характеристику положения – медиану случайной величины. **Медиана** – это абсцисса точки, в которой площадь под кривой распределения делится пополам. Медиана (Me) определяется из равенства $P(X < Me) = P(X > Me)$, т.е. одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше или больше медианы (рис. 4.2).

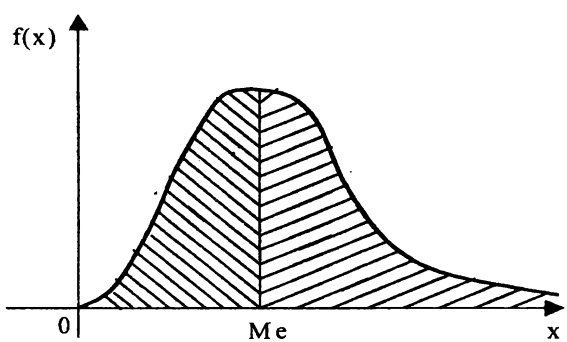


Рис. 4.2

В случае симметричного унимодального распределения медиана совпадает с математическим ожиданием и модой.

4.3. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение случайной величины

Дисперсия и среднеквадратическое отклонение относятся к характеристикам вариации. Характеристики вариации уточняют представление о распределении случайной величины, давая представление о степени рассеивания случайной величины относительно центра группирования.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины являются ее основными числовыми характеристиками.

Дисперсия случайной величины – это характеристика рассеивания значений случайной величины около ее математического ожидания, определяемая по формуле

$$DX = M(X - MX)^2.$$

Т.е. дисперсия равна математическому ожиданию квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания.

Дисперсию часто вычисляют по формуле

$$DX = MX^2 - (MX)^2,$$

которая следует из определения дисперсии и свойств математического ожидания:

$$DX = M(X - MX)^2 = M(X^2 - 2X \cdot MX + (MX)^2) =$$
$$= MX^2 - 2 \cdot MX \cdot MX + (MX)^2 = MX^2 - (MX)^2.$$

Если случайная величина X дискретна и известен ее ряд распределения $\{p_k\}$, то дисперсию находят как

$$DX = \sum_k x_k^2 p_k - (\sum_k x_k p_k)^2;$$

если же случайная величина X непрерывна и известна ее плотность f(x), то дисперсию находят как

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \right).$$

Вычислим дисперсию различных распределений.

Дисперсия случайной величины, имеющей распределение Бернулли с параметром p:

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1 - p) - p^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

Дисперсия случайной величины, имеющей биномиальное распределение с параметрами n и p:

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k} - (np)^2 =$$

$$= \sum_k k^2 \cdot \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} - (np)^2 =$$

$$= np \sum_k k \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} - (np)^2 =$$

$$= np\{(n-1)\cdot p + 1\} - (np)^2 = np(1-p).$$

Итак, если X ~ Bi (n, p), то $DX = np(1-p)$.

Дисперсия случайной величины, имеющей геометрическое распределение с параметром p:

$$DX = MX^2 - (MX)^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot p \cdot (1-p)^k - \frac{(1-p)^2}{p^2} = p \cdot (1-p) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} - \frac{(1-p)^2}{p^2} =$$

$$= \frac{(1-p)(2-p)}{p^2} - \frac{(1-p)^2}{p} = \frac{1-p}{p^2}.$$

Итак, если X ~ G (p), то $DX = \frac{1-p}{p^2}$.

Дисперсия случайной величины, имеющей распределение Пуассона с параметром λ:

$$DX = MX^2 - (MX)^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = \lambda \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} +$$

$$+ \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Итак, если X ~ П (λ), то $DX = \lambda$.

Дисперсия случайной величины, имеющей равномерное распределение на отрезке [a, b]:

$$DX = MX^2 - (MX)^2 =$$

$$= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\Big|_a^b - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Итак, если X ~ R (a, b), то $DX = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Дисперсия случайной величины, имеющей показательное распределение с параметром λ:

$$DX = MX^2 - (MX)^2 =$$

$$\int_0^\infty x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = -x^2 \cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} \cdot 2x \quad dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= \frac{2}{\lambda} \cdot MX - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Итак, если X ~ E (λ), то $DX = \frac{1}{\lambda^2}$.

Дисперсия случайной величины, имеющей нормальное распределение с параметрами m и σ^2:

$$DX = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Заменой $z = \frac{x-m}{\sigma}$ приведем вычисляемый интеграл к виду

$$DX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sigma^3 \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \quad e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = \sigma^2.$$

Итак, если $X \sim N(m, \sigma)$, то $DX = \sigma^2$.

Свойства дисперсии следуют из определения дисперсии и свойств математического ожидания.

Теорема (знак дисперсии):

Дисперсия любой случайной величины неотрицательна.

Действительно, если X – дискретна, то

$$DX = \sum_k (x_k - MX)^2 p_k.$$

Все слагаемые в сумме неотрицательны, следовательно

$$DX \geq 0.$$

Аналогично для непрерывной случайной величины.

Теорема (дисперсия постоянной):

Дисперсия постоянной равна нулю.

Имеем $DC = M(C - MC)^2 = M(C - C)^2 = M(0) = 0.$

Теорема (дисперсия произведения случайной и постоянной величин):

Дисперсия произведения случайной величины X на постоянную C равна произведению дисперсии случайной величины X на квадрат постоянной:

$$D(CX) = C^2 DX.$$

В самом деле,

$$D(CX) = M(CX - M(CX))^2 = M(CX - C \cdot MX)^2 = M(C^2 (X - MX)^2) =$$
$$= C^2 M(X - MX)^2 = C^2 DX.$$

Теорема (дисперсия суммы случайной и постоянной величин):

Дисперсия случайной величины X не изменится, если к случайной величине прибавить постоянную, т.е.

$$D(C + X) = DX.$$

Дисперсия случайной величины имеет размерность квадрата случайной величины, в то время как математическое ожидание имеет размерность самой случайной величины. Для наглядной характеристики

рассеивания удобнее пользоваться величиной, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины. Для этого из дисперсии извлекают квадратный корень. Полученную величину называют **среднеквадратическим отклонением случайной величины X**. Среднеквадратическое отклонение обозначают $\sigma(X)$.

Из свойств дисперсий вытекают соответствующие свойства среднеквадратического отклонения:

1) среднеквадратическое отклонение любой случайной величины неотрицательно;
2) среднеквадратическое отклонение равно нулю тогда и только тогда, когда величина X – постоянна.

В математической модели случайная величина описывает те или иные параметры изучаемого случайного явления. Числовые значения исходных параметров зависят от выбора масштаба его измерения (например, рубли, тысячи рублей, миллионы рублей). При этом числовые характеристики случайной величины зависят от выбора масштаба измерения исходного параметра.

Для изучения свойств случайных величин, не зависящих от выбора масштаба измерения и положения центра группирования, исходную случайную величину приводят к некоторому стандартному, нормированному виду.

Если $MX = 0$ и $DX = 1$, то случайную величину X называют нормированной. Для того, чтобы отнормировать случайную величину, из нее надо вычесть математическое ожидание и поделить на среднеквадратическое отклонение:

$$X^* = \frac{X - MX}{\sigma(X)}.$$

Из свойств математического ожидания и среднеквадратического отклонения следует, что

$$MX^* = M\frac{X - MX}{\sigma(X)} = \frac{1}{\sigma(X)}M(X - MX) = 0,$$

$$DX^* = D\frac{X - MX}{\sigma(X)} = \frac{1}{(\sigma(X))^2}D(X - MX) = \frac{DX}{(\sigma(X))^2} = 1,$$

т.е. случайная величина X^* является нормированной.

Нормируя случайную величину, мы как бы меняем начало отсчета и масштаб измерения исходного периметра таким образом, что $MX^* = 0$ и единицей измерения становится $\sigma(X)$ – среднеквадратическое

отклонение случайной величины X. При этом сама случайная величина X* является безразмерной и не зависит от выбора масштаба измерения исходного параметра.

4.4. Моменты случайной величины

Кроме уже рассмотренных числовых характеристик, в теории вероятностей используют так называемые моменты.

Понятие момента широко применяется в механике для описания распределения масс (статические моменты, моменты инерции). Теми же приемами пользуются в теории вероятностей для описания основных свойств распределения случайной величины.

Моментом случайной величины порядка n называют математическое ожидание n-ой степени случайной величины:

$$d_n = M(X^n).$$

Определение момента случайной величины совпадает с определением начального момента порядка n в механике, если на оси абсцисс в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сосредоточены массы $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Нетрудно убедиться, что введенная ранее основная характеристика положения - математическое ожидание – представляет собой момент первого порядка.

Центрированной случайной величиной X°, соответствующей величине X, называется величина, равная разности исходной случайной величины и ее математического ожидания:

$$X^\circ = X - MX$$

Очевидно, что математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю.

Моменты центрированной случайной величины называют **центральными моментами**. Они аналогичны моментам относительно центра тяжести, потому что центрирование случайной величины равносильно переносу начала координат в среднюю точку (центр тяжести).

Таким образом, **центральный момент случайной величины X порядка n** – это математическое ожидание n-ой степени центрированной случайной величины:

$$\mu_n = M(X - MX)^n.$$

Второй центральный момент – это дисперсия случайной величины:

$$\mu_2 = M(X - MX)^2 = DX$$

Если обратиться к механической интерпретации, то дисперсия представляет собой момент инерции заданного распределения масс относительно центра тяжести.

Третий центральный момент служит для характеристики асимметрии распределения. Если распределение симметрично относительно математического ожидания, то все центральные моменты нечетного порядка (если они существуют) равны нулю.

Поэтому естественно в качестве характеристики асимметрии распределения выбрать какой-либо нечетный центральный момент. Простейший из них – третий. Он имеет размерность куба случайной величины; чтобы получить безразмерную характеристику, m_3 делят на куб среднеквадратического отклонения.

Кроме рассмотренных выше моментов, на практике иногда применяют абсолютные моменты.

Абсолютный момент случайной величины порядка n – это математическое ожидание n-ой степени модуля случайной величины $M|X|^n$.

Очевидно, абсолютные моменты четных порядков совпадают с обычными моментами.

Во многих задачах практики полная характеристика случайной величины – закон распределения – или не нужна, или не может быть получена. В этих случаях ограничиваются приблизительным описанием случайной величины с помощью числовых характеристик, каждая из которых выражает какое-либо характерное свойство распределения.

Часто числовыми характеристиками пользуются для приближенной замены одного распределения другим, причем эту замену производят так, чтобы сохранились неизменными несколько важнейших моментов.

Например, всякое распределение Пирсона однозначно определяется своими первыми четырьмя моментами d_1, d_2, d_3, d_4. Это свойство используется для описания часто встречающихся на практике распределений.

4.5. Квантиль распределения случайной величины

Квантиль распределения случайной величины – одна из числовых характеристик распределения. Название квантиль произошло от латинского слова quantum – сколько.

Квантиль распределения K_p случайной величины уровня p для непрерывных распределений определяется как решение уравнение

$F(K_p) = p$, где F - функция распределения случайной величины.

Очевидно, что квантиль уровня $1/2$ – это медиана распределения.

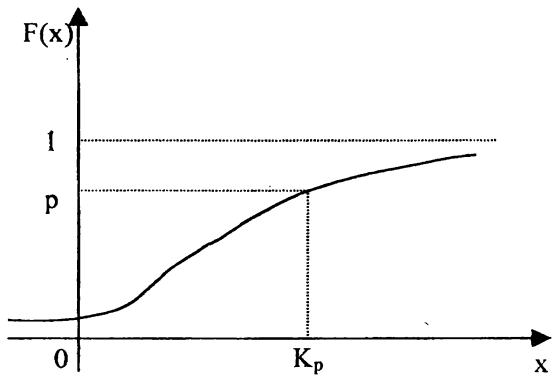


Рис. 4.3

Если положить p = 0,95, то получим квантиль уровня 0,95.

Квантили различных уровней находят по таблицам распределений или по специальным таблицам квантилей.

Например, если случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами 0 и 1, т.е. X ~ N (0,1), то $K_{0,1} = -1{,}28$;

$K_{0,2} = -0{,}84$; $K_{0,3} = -0{,}52$; $K_{0,4} = -0{,}25$; $K_{0,5} = 0$; $K_{0,6} = 0{,}25$;

$K_{0,7} = 0{,}52$; $K_{0,8} = 0{,}84$; $K_{0,9} = 1{,}28$.

Для применения в математической статистике составлены таблицы квантилей наиболее важных распределений.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Составьте логическую схему базы знаний по теме юниты.

* Выполнение этих задач обязательно только для отлично занимающихся студентов.

II. Решите самостоятельно следующие задачи. Данные своей задачи возьмите из таблицы по номеру, соответствующему вашему порядковому номеру в группе.

1. Из B_1 билетов лотереи B_2 выигрышных. Наугад берут 2 билета. Какова вероятность того, что они выигрышные?

2. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен равна P_1, вероятность сдачи второго экзамена P_2, третьего – P_3. Найти вероятность того, что
   a) студент сдаст хотя бы один экзамен;
   b) студент сдаст только один экзамен;
   c) студент сдаст все три экзамена;
   d) студент не сдаст ни одного экзамена.

3. Два охотника увидели волка и одновременно в него выстрелили. Каждый охотник попадает с вероятностью p. Найти вероятность того, что
   a) волк будет подстрелен;
   b) в волка попадет только один охотник.

4 Получена партия телевизоров, из которых T% сделаны на одном заводе, а остальные на втором. Вероятность брака на первом заводе равна p_1, а на втором – p_2. Найти вероятность того, что

a) случайно выбранный телевизор не имеет брака;

b) телевизор изготовлен на первом заводе, если известно, что он не бракованный.

*5. На пути движения автомобиля K светофоров. Каждый из них с вероятностью 0,5 разрешает либо запрещает дальнейшее движение. Найти ряд распределения и построить многоугольник распределения числа светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки. Найти числовые характеристики данной случайной величины.

*6. Имеется R ключей, из которых только один подходит к замку. Найти ряд распределения и построить многоугольник распределения числа проб при открывании замка, если испробованный ключ в последующих попытках не используется. С какой вероятностью

замок будет открыт до того, как будут использованы $[\frac{R}{2}]$ ключей?

7. При работе ЭВМ число сбоев подчиняется закону Пуассона. Среднее число сбоев в неделю равно λ. Найти вероятность того, что в течение данной недели
   a) не будет ни одного сбоя;
   b) будет только один сбой;
   c) будет более трех сбоев.
8. Автобус ходит с интервалом m минут. Человек подходит к остановке в случайный момент времени. Предполагая, что время ожидания автобуса на остановке имеет равномерное распределение, найти
   a) среднюю продолжительность времени ожидания автобуса;
   b) среднее квадратичное отклонение времени ожидания автобуса;
   c) вероятность того, что время ожидания превысит t мин.

9. Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами 0 и 1 (т.е. X ~ N (0,1)). Случайная величина $Y = aX + b$ является линейной функцией от случайной величины X. Требуется
   a) записать плотность распределения случайной величины Y и построить кривую распределения;
   b) найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины Y;
   c) вычислить $P\{|Y| \leq 2a\}$.

10. Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами m и σ (т.е. X ~ N (m, σ)), а случайная величина $Y = e^x$ распределения, найти математическое ожидание Y.

Данные к задачам 1-10

	N1		N2			N3	N4			N5	N6	N7		N8		N9		N10	
	B_1	B_2	P_1	P_2	P_3	P	T	P_1	P_2	k	R	λ	S	m	t	a	b	m	σ
0	10	3	0,9	0,8	0,7	0,6	55	0.01	0,1	3	5	1	1	10	5	$\sqrt{2}$	–1	0	1
1	20	2	0.5	0,4	0,3	0.25	10	0,10	0.03	4	6	2	2	11	2	3	1	1	1
2	21	3	0,6	0.4	0.3	0,26	20	0,11	0,04	5	7	3	2	12	3	$\sqrt{3}$	–1	–1	1
3	22	4	0.7	0,4	0,3	0,27	30	0,12	0.05	6	8	4	2	13	4	$\frac{1}{4}$	1	1	2
4	23	5	0,8	0.4	0,3	0.28	40	0,01	0,06	7	9	5	2	14	2	4	–1	–1	2
5	24	6	0,9	0.4	0,3	0,29	50	0,01	0,07	8	10	6	2	15	3	3	2	2	1
6	25	7	0,6	0.5	0,3	0,30	60	0,01	0,08	9	6	7	2	16	4	3	–2	–2	1
7	11	2	0,7	0,5	0,3	0,31	70	0,01	0.09	4	7	2	3	17	2	$\frac{1}{4}$	2	1	3
8	12	3	0,8	0,5	0,3	0,32	80	0.10	0,03	5	8	3	3	18	3	4	–2	–1	3
9	13	4	0,9	0.5	0,3	0,33	90	0,11	0,04	6	9	4	3	19	4	5	1	3	1
10	14	5	0,7	0,6	0,3	0,34	15	0.12	0,05	7	10	5	3	20	2	$\sqrt{5}$	–1	–3	1
11	15	6	0,8	0,6	0,3	0,35	25	0,13	0.06	8	6	6	3	21	3	5	2	2	3
12	16	7	0,9	0,6	0,3	0,36	35	0.02	0.07	9	7	7	3	22	4	$\frac{1}{5}$	–2	–2	3
13	17	8	0,8	0,7	0,3	0,37	45	0.02	0.08	4	8	2	4	23	5	$\sqrt{5}$	3	3	2
14	18	9	0,9	0,7	0,3	0,38	65	0.02	0.09	5	9	3	4	24	6	$\frac{1}{5}$	–3	–3	2
15	19	2	0,9	0,8	0,3	0,39	75	0,10	0,04	6	10	4	4	25	7	$\frac{1}{5}$	4	1	4
16	20	3	0.6	0,5	0,4	0.40	85	0.11	0,05	7	6	5	4	26	5	$\sqrt{5}$	–4	–1	4
17	21	4	0,7	0,5	0.4	0.41	90	0,12	0,06	8	7	6	4	27	6	–2	3	2	4
18	22	5	0,8	0,5	0,4	0,42	80	0,13	0.07	9	8	7	4	28	7	–4	2	–2	4
19	23	6	0,9	0,5	0,4	0.43	70	0.03	0,08	4	9	2	5	29	5	–3	2	3	4
20	24	7	0,7	0.6	0.4	0,44	60	0.03	0.09	5	10	3	5	30	6	–3	1	–3	4
21	25	8	0,8	0.6	0.4	0.45	50	0.10	0,05	6	6	4	5	31	7	–5	1	4	1
22	11	3	0.9	0,6	0.4	0.46	40	0.11	0.06	7	7	5	5	32	8	–5	2	–4	1
23	12	4	0,8	0.7	0,4	0,47	30	0,12	0.07	8	8	6	5	33	9	–5	3	4	2
24	13	5	0.9	0,7	0,4	0,48	20	0,13	0.08	9	9	7	5	34	10	–5	4	–4	2
25	14	6	0,9	0,8	0.4	0.49	10	0.04	0,09	4	10	2	6	35	10	–1	2	4	3
26	15	7	0,7	0,6	0.5	0.51	15	0,01	0.15	5	6	3	6	36	10	–1	3	–4	3
27	16	8	0,8	0,6	0,5	0,52	25	0,01	0.16	6	7	4	6	37	10	–1	4	5	1
28	17	9	0,9	0,6	0.5	0,53	35	0,02	0.15	7	8	5	6	38	10	–1	5	–5	1
29	18	4	0.8	0.7	0.5	0,54	45	0,02	0.16	8	9	6	6	39	10	–2	3	5	2
30	19	3	0,9	0,7	0.5	0.55	65	0,03	0.15	9	10	7	6	40	10	–2	5	–5	2

ТРЕНИНГ УМЕНИЙ

1. Пример выполнения упражнений на умение N 1

Задание

Студент знает ответ на 30 вопросов из 50. Какова вероятность ответить правильно на билет, состоящий из 3 вопросов?

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

N п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Дать описание стохастического эксперимента, в результате которого может произойти событие А	Студент вытаскивает билет, состоящий из трех вопросов. А={студент знает ответ на все три вопроса}.
2.	Вычислить общее число N исходов данного стохастического эксперимента	$N = C_{50}^3$ – число способов выбрать три вопроса из 50 исходных.
3.	Вычислить число исходов M, благоприятствующих событию А	$M = C_{30}^3$ – число способов выбрать три вопроса из 30 известных студенту.
4.	Вычислить вероятность события $p(A) = \frac{M}{N}$	$P(A) = \frac{C_{30}^3}{C_{50}^3} = \frac{30!}{3!27!} : \frac{50!}{3!47!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{50 \cdot 49 \cdot 48} = = \frac{24360}{117600} \approx 0{,}207$.

Решите самостоятельно следующие задачи:

1.1. В партии из 40 изделий 10 бракованных. Случайным образом отобрано 4 изделия. Какова вероятность того, что они все без брака?

1.2. В мастерской 12 измерительных приборов, из которых 6 проходили настройку. Настройщик наугад берет 2 прибора. Какова вероятность того, что они уже проходили настройку?

1.3. На полке 26 книг, из которых 17 на русском языке. Наугад берутся 3 книги. Какова вероятность того, что они все на русском языке?

1.4. В урне 11 белых шаров и 9 красных. Наугад выбирают 2 шара. Какова вероятность того, что они белые?

1.5. В аквариуме плавают 24 рыбки, из которых половину составляют гуппи. Кот случайным образом поймал 4 рыбки, Какова вероятность того, что ему достались только гуппи?

2.Пример выполнения упражнения на умение N 2

Задание

Стрелок производит 3 выстрела по мишени. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах соответственно равны 0,9; 0,8 и 0,7. Найти вероятности того, что в результате этих выстрелов окажется

а) ни одного попадания;

б) хотя бы одно попадание;

в) ровно одно попадание;

г) ровно три попадания.

Считать, что выстрелы производятся независимо друг от друга.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Обозначить все события, указанные в задаче, и известные вероятности	A_1 – попал при 1-м выстреле; $P(A_1) = 0,9$ A_2 – попал при 2-м выстреле; $P(A_2) = 0,8$ A_3 – попал при 3-м выстреле; $P(A_3) = 0,7$ B – ни одного попадания C – хотя бы одно попадание D – ровно одно попадание E – ровно три попадания
2.	Установить связи между событиями	$B = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$; $C=\overline{B}$; $C=A_1+A_2+A_3$; $D = A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 + A_2 \cdot \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_3 + A_3 \cdot \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2$; $E = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.
3.	Используя теоремы сложения и умножения вероятностей, а также формулу для вычисления противоположного события, вычислить требуемые вероятности	$P(B) = P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) =$ $= [1 - P(A_1)] \cdot [1 - P(A_2)] \cdot [1 - P(A_3)] = 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0.006.$ $P(C)=P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,006=0,994.$ $P(D) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_3) + P(A_2) P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_3) +$ $+ P(A_3) \cdot P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) = 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,1 \cdot 0,3 +$ $+ 0,7 \cdot 0,1 \cdot 0,2 = 0,092.$ $P(E) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,504.$

Решите самостоятельно следующие задачи:

2.1. Для повышения надежности прибора он дублируется двумя такими же приборами. Надежность (вероятность безотказной работы) каждого прибора равна 0,6. Определить надежность системы, состоящей из этих трех приборов.

2.2. В мастерской два мотора работают независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение дня первый мотор не потребует ремонта, равна 0,8, а для второго мотора эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что в течение дня

а) ни один мотор не потребует ремонта;

б) хотя бы один мотор потребует ремонта.

2.3. Из одной колоды, содержащей 36 карт, случайно выбирают одну карту; затем наугад выбирают еще одну карту из другой такой же колоды. Какова вероятность того, что хотя бы одна из выбранных карт дама?

2.4. Два студента ищут нужную книгу в магазинах. Вероятность того, что книга будет найдена первым студентом равна 0,6, а вторым – 0,7. Какова вероятность того, что

а) только один из студентов найдет книгу?

б) хотя бы один из них найдет книгу?

2.5. Три спортсмена участвуют в отборочных соревнованиях. Вероятности зачисления в сборную команду 1-го, 2-го и 3-го спортсменов соответственно равны 0,8; 0,7 и 0,6. Найти вероятность того, что

а) три спортсмена попадут в сборную;

б) хотя бы один из них попадет в сборную.

3. Пример выполнения упражнения на умение N 3

Задание

Специалист высшей квалификации собирает 40% приборов, надежность которых равна 0,95. Специалист средней квалификации собирает 60% приборов, надежность которых равна 0,75. Определить вероятность того, что случайно отобранный прибор будет работать безотказно.

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

N п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Дать описание всех гипотез, на которые можно разбить пространство элементарных исходов и события А	H_1 – прибор собран специалистом высшей квалификации; H_1 – прибор собран специалистом средней квалификации; А – прибор работает безотказно.
2.	Вычислить вероятности каждой гипотезы	$P(H_1) = 0,4$; $P(H_2) = 0,6$.
3.	Вычислить условную вероятность события А при каждой гипотезе	$P(A/H_1) = 0,95$; $P(A/H_2) = 0,75$.
4.	Вычислить вероятность события А по формуле полной вероятности	$P(A) = P(A/H_1) \cdot P(H_1) + P(A/H_2) \cdot P(H_2) =$ $= 0,95 \cdot 0,4 + 0,75 \cdot 0,6 = 0,83$.

Решите самостоятельно следующие задачи:

3.1. В магазин поступило 60 пар обуви с одной фабрики, на которой выпускают 90% обуви отличного качества, и 80 пар обуви с другой фабрики, на которой выпускается 70% обуви отличного качества. Какова вероятность того, что случайно отобранная покупателем в магазине пара обуви – отличного качества?

3.2. Имеется три одинаковых ящика. В первом ящике находится 10 белых и 5 красных шаров, во втором - 10 белых и 10 красных шаров, в третьем - 5 белых и 10 красных шаров. Из наудачу выбранного ящика вытянули шар. Какова вероятность того, что он красный?

3.3. Человек, заблудившийся в лесу, вышел на пересечение трех тропинок. Вероятность выхода из леса в течение оставшегося дня составляет соответственно 0,8; 0,4; 0,6 для каждой тропинки. Чему равна вероятность того, что человек вышел из леса в этот день, если он выбирает одну из трех тропинок с равной вероятностью?

3.4. Пассажир обращается с вероятностью 0,7 в одну кассу и с вероятностью 0,3 – в другую. Вероятность приобрести требуемый билет в первой кассе – 0,6, а во второй – 0,5. Найти вероятность того, что пассажир купил билет.

3.5. В зоомагазине в трех аквариумах плавает по 12 рыбок. При этом в первом аквариуме 2 золотые рыбки, во втором – 4, а в третьем их нет. Случайным образом выбирается аквариум, а в нем одна рыбка. Какова вероятность того, что это будет золотая рыбка?

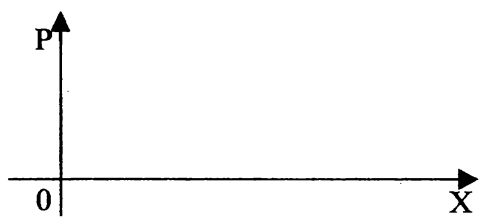
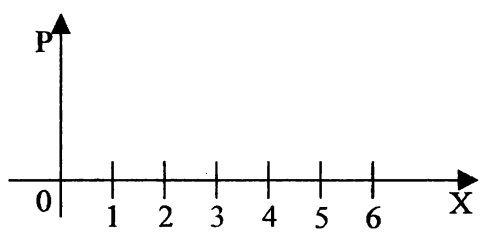
4. Пример выполнения упражнения на умение N 4

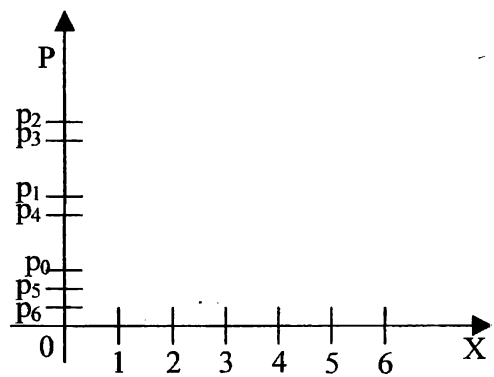
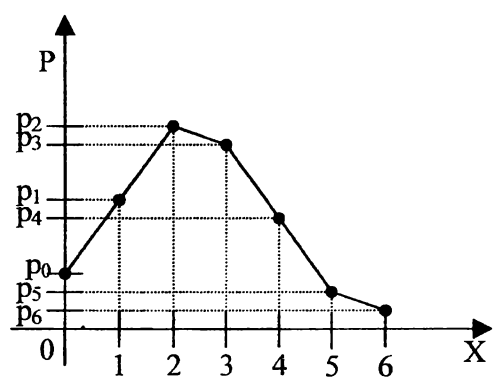
Задание

Построить многоугольник распределения для случайной величины, имеющей биномиальное распределение с параметрами n = 6, p = 0,4.

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие задания.

N п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Начертить декартову систему координат	
2.	По оси абсцисс отложить все возможные значения случайной величины x_0, x_1, … x_n	 $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5, x_6 = 6.$

3.	По оси абсцисс отложить вероятности возможных значений случайной величины p_0, p_1, … p_n., вычислить их	$p_0 = C_6^0\, 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^6 = 0{,}6^6 = 0{,}046656.$ $p_1 = C_6^1\, 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^5 = 6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}186624.$ $p_2 = C_6^2\, 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^4 = 15 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^4 = 0{,}31104.$ $p_3 = C_6^3\, 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^3 = 20 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}27648.$ $p_4 = C_6^4\, 0{,}4^4 \cdot 0{,}6^2 = 15 \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}13824.$ $p_5 = C_6^5\, 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^1 = 6 \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6 = 0{,}036864.$ $p_6 = C_6^6\, 0{,}4^6 \cdot 0{,}6^0 = 0{,}4^6 = 0{,}004096.$ 
4.	Точки с координатами (x_0, p_0), (x_1, p_1), …, (x_n, p_n) соединить отрезками прямых	

Решите самостоятельно следующие задачи:

4.1. Построить многоугольник распределения для случайной величины, имеющей биномиальное распределение с параметрами $n = 7$ и $p = 0,7$.

4.2. Построить многоугольник распределения для случайной величины, имеющей биномиальное распределение с параметрами $n = 8$ и $p = 0,5$.

4.3. Построить многоугольник распределения для случайной величины, имеющей геометрическое распределение с параметром $p = 0,5$. Указание: пренебречь вероятностями, меньшими 10^{-3} и значениями им соответствующими.

4.4. Построить многоугольник распределения для случайной величины, имеющей гипергеометрическое распределение с параметрами N = 20; M = 16; n = 5.

4.5. Построить многоугольник распределения случайной величины, имеющей распределение Пуассона с параметром l = 2. Указание: пренебречь вероятностями, меньшими 10^{-3} и значениями, им соответствующим.

5. Пример выполнения упражнения на умение N 5

Задание

Ошибка измерения некоторого расстояния данным прибором – случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием 1,3 м и среднеквадратическим отклонением, равным 0,8 м.

Найти вероятность того, что отклонение измеренного значения от истинного не превзойдет по абсолютной величине 1,5 м.

Решение. Заполните таблицу, подобрав каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

N п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Вычислить расстояние от правого и левого концов интервала до центра распределения $\beta = \frac{b-m}{\sigma}$; $\alpha = \frac{a-m}{\sigma}$	Из условия задачи следует, что $a = -1,5$ м; $b = 1,5$ м, тогда $\beta = \frac{1,5-1,3}{0,8} = 0,25$; $\alpha = \frac{-1,5-1,3}{0,8} = -2,25$.
2.	По таблице функции $\Phi^*(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$ найти значения $\Phi^*(\alpha)$ и $\Phi^*(\beta)$	Находим по таблице. $\Phi^*(0,25) = 0,5987$; $\Phi^*(-0,25) = 0,0123$.
3.	Вычислить искомую вероятность по формуле $P(a<X<b) = \Phi^*(\beta) - \Phi^*(\alpha)$	$P(\|X\|<1,5) = \Phi^*(0,25) - \Phi^*(-2,25) = 0,5864$.

Решите самостоятельно следующие задачи:

5.1. Ошибка измерений прибора распределена нормально с дисперсией 9 ед^2. Систематическая ошибка прибора отсутствует. Найти вероятность того, что ошибка измерения не превзойдет по модулю 4 ед.

5.2. Длина платья, выпускаемого некоторым предприятием, – случайная величина, распределенная нормально со средним 100 см и среднеквадратическим отклонением 4 см. Найти вероятность того, что случайно выбранное платье будет иметь длину, меньшую чем 90 см.

5.3. Ошибка взвешивания – случайная величина, распределенная нормально с параметрами $m = 10$ г и $\sigma = 20$ г. Найти вероятность того, что взвешивание произведено с ошибкой, не превышающей по модулю 25 г.

5.4. Отклонение размера изготавливаемой детали от стандарта - случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $m = 0$ и $\sigma = 3$ мм. Найти вероятность того, что размер изделия отклонился от стандартного на 6 мм по модулю.

Таблица

Значения нормальной функции распределения:

$$\Phi^*(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ
—0,00	0,5000	40	—0,30	0,3821	38	—0,60	0,2743	34
—0,01	4960	40	—0,31	3783	38	—0,61	2709	33
—0,02	4920	40	—0,32	3745	38	—0,62	2676	33
—0,03	4880	40	—0,33	3707	38	—0,63	2643	32
—0,04	4840	39	—0,34	3669	37	—0,64	2611	33
—0,05	4801	40	—0,35	3632	38	—0,65	2578	32
—0,06	4761	40	—0,36	3594	37	—0,66	2546	32
—0,07	4721	40	—0,37	3557	37	—0,67	2514	31
—0,08	4681	40	—0,38	3520	37	—0,68	2483	32
—0,09	4641	39	—0,39	3483	37	—0,69	2451	31
—0,10	0,4602	40	—0,40	0,3446	37	—0,70	0,2420	31
0,11	4562	40	—0,41	3409	37	—0,71	2389	31
0,12	4522	39	—0,42	3372	36	—0,72	2358	31
—0,13	4483	40	—0,43	3336	36	—0,73	2327	30
—0,14	4443	39	—0,44	3300	36	—0,74	2297	31
—0,15	4404	40	—0,45	3264	36	—0,75	2266	30
—0,16	4364	39	—0,46	3228	36	—0,76	2236	30
—0,17	4325	39	—0,47	3192	36	—0,77	2206	29
—0,18	4286	39	—0,48	3156	35	—0,78	2177	29
—0,19	4247	40	—0,49	3121	36	—0,79	2148	29
—0,20	0,4207	39	—0,50	0,3085	35	—0,80	0,2119	29
—0,21	4168	39	—0,51	3050	35	—0,81	2090	29
—0,22	4129	39	—0,52	3015	34	—0,82	2061	28
0,23	4090	38	—0,53	2981	35	—0,83	2033	28
—0,24	4052	39	—0,54	2946	34	—0,84	2005	28
—0,25	4013	39	—0,55	2912	35	—0,85	1977	28
—0,26	3974	38	—0,56	2877	34	—0,86	1949	27
—0,27	3936	39	—0,57	2843	33	—0,87	1922	28
—0,28	3897	38	—0,58	2810	34	—0,88	1894	27
—0,29	3859	38	—0,59	2776	33	—0,89	1867	26

Продолжение таблицы

x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ
—0,90	0,1841	27	—1,30	0,0968	17	—1,70	0,0446	10
—0,91	1814	26	—1,31	0951	17	—1,71	0436	9
—0,92	1788	26	—1,32	0934	16	—1,72	0427	9
—0,93	1762	26	—1,33	0918	17	—1,73	0418	9
—0,94	1736	25	—1,34	0901	16	—1,74	0409	8
—0,95	1711	26	—1,35	0885	16	—1,75	0401	9
—0,96	1685	25	—1,36	0869	16	—1,76	0392	8
—0,97	1660	25	—1,37	0853	15	—1,77	0384	9
—0,98	1635	24	—1,38	0838	15	—1,78	0375	8
—0,99	1611	24	—1,39	0823	15	—1,79	0367	8
—1,00	0,1587	24	—1,40	0,0808	15	—1,80	0,0359	8
—1,01	1563	24	—1,41	0793	15	—1,81	0351	7
—1,02	1539	24	—1,42	0778	14	—1,82	0344	8
—1,03	1515	23	—1,43	0764	15	—1,83	0336	7
—1,04	1492	23	—1,44	0749	14	—1,84	0329	7
—1,05	1469	23	—1,45	0735	14	—1,85	0322	8
—1,06	1446	23	—1,46	0721	13	—1,86	0314	7
—1,07	1423	22	—1,47	0708	14	—1,87	0307	6
—1,08	1401	22	—1,48	0694	13	—1,88	0301	7
—1,09	1379	22	—1,49	0681	13	—1,89	0294	6
—1,10	0,1357	22	—1,50	0,0668	13	—1,90	0,0288	7
—1,11	1335	21	—1,51	0655	12	—1,91	0281	7
—1,12	1314	22	—1,52	0643	13	—1,92	0274	6
—1,13	1292	21	—1,53	0630	12	—1,93	0268	6
—1,14	1271	20	—1,54	0618	12	—1,94	0262	6
—1,15	1251	21	—1,55	0606	12	—1,95	0256	6
—1,16	1230	20	—1,56	0594	12	—1,96	0250	6
—1,17	1210	20	—1,57	0582	11	—1,97	0244	5
—1,18	1190	20	—1,58	0571	12	—1,98	0239	6
—1,19	1170	19	—1,59	0559	11	—1,99	0233	5
—1,20	0,1151	20	—1,60	0,0548	11	—2,00	0,0228	49
—1,21	1131	19	—1,61	0537	11	—2,10	0179	40
—1,22	1112	19	—1,62	0526	10	—2,20	0139	32
—1,23	1093	18	—1,63	0516	11	—2,30	0107	25
—1,24	1075	19	—1,64	0505	10	—2,40	0082	20
—1,25	1056	18	—1,65	0495	10	—2,50	0062	15
—1,26	1038	18	—1,66	0485	10	—2,60	0047	12
—1,27	1020	17	—1,67	0475	10	—2,70	0035	9
—1,28	1003	18	—1,68	0465	10	—2,80	0026	7
—1,29	0985	17	—1,69	0455	9	—2,90	0019	5

x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ
—3,00	0,0014	4	0,30	0,6179	38	0,70	0,7580	31
—3,10	0010	3	0,31	6217	38	0,71	7611	31
—3,20	0007	2	0,32	6255	38	0,72	7642	31
—3,30	0005	2	0,33	6293	38	0,73	7673	30
—3,40	0003	1	0,34	6331	37	0,74	7703	31
—3,50	0002	0	0,35	6368	38	0,75	7734	30
—3,60	0002	1	0,36	6406	37	0,76	7764	30
—3,70	0001	0	0,37	6443	37	0,77	7794	29
—3,80	0001	1	0,38	6480	37	0,78	7823	29
—3,90	0000		0,39	6517	37	0,79	7852	29
0,00	0,5000	40	0,40	0,6554	37	0,80	0,7881	29
0,01	5040	40	0,41	6591	37	0,81	7910	29
0,02	5080	40	0,42	6628	36	0,82	7939	28
0,03	5120	40	0,43	6664	36	0,83	7967	28
0,04	5160	39	0,44	6700	36	0,84	7995	28
0,05	5199	40	0,45	6736	36	0,85	8023	28
0,06	5239	40	0,46	6772	36	0,86	8051	27
0,07	5279	40	0,47	6808	36	0,87	8078	28
0,08	5319	40	0,48	6844	35	0,88	8106	27
0,09	5359	39	0,49	6879	36	0,89	8133	26
0,10	0,5398	40	0,50	0,6915	35	0,90	0,8159	27
0,11	5438	40	0,51	6950	35	0,91	8186	26
0,12	5478	39	0,52	6985	34	0,92	8212	26
0,13	5517	40	0,53	7019	35	0,93	8238	26
0,14	5557	39	0,54	7054	34	0,94	8264	25
0,15	5596	40	0,55	7088	35	0,95	8289	26
0,16	5636	39	0,56	7123	34	0,96	8315	25
0,17	5675	39	0,57	7157	33	0,97	8340	25
0,18	5714	39	0,58	7190	34	0,98	8365	24
0,19	5753	40	0,59	7224	33	0,99	8389	24
0,20	0,5793	39	0,60	0,7257	34	1,00	0,8413	24
0,21	5832	39	0,61	7291	33	1,01	8437	24
0,22	5871	39	0,62	7324	33	1,02	8461	24
0,23	5910	38	0,63	7357	32	1,03	8485	23
0,24	5948	39	0,64	7389	33	1,04	8508	23
0,25	5987	39	0,65	7422	32	1,05	8531	23
0,26	6026	38	0,66	7454	32	1,06	8554	23
0,27	6064	39	0,67	7486	31	1,07	8577	22
0,28	6103	38	0,68	7517	32	1,08	8599	22
0,29	6141	38	0,69	7549	31	1,09	8621	22

x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ
1,10	0,8643	22	1,50	0,9332	13	1,90	0,9713	6
1,11	8665	21	1,51	9345	12	1,91	9719	7
1,12	8686	22	1,52	9357	13	1,92	9726	6
1,13	8708	21	1,53	9370	12	1,93	9732	6
1,14	8729	20	1,54	9382	12	1,94	9738	6
1,15	8749	21	1,55	9394	12	1,95	9744	6
1,16	8770	20	1,56	9406	12	1,96	9750	6
1,17	8790	20	1,57	9418	11	1,97	9756	5
1,18	8810	20	1,58	9429	12	1,98	9761	6
1,19	8830	19	1,59	9441	11	1,99	9767	5
1,20	0,8849	20	1,60	0,9452	11	2,00	0,9772	49
1,21	8869	19	1,61	9463	11	2,10	9821	40
1,22	8888	19	1,62	9474	10	2,20	9861	32
1,23	8907	18	1,63	9484	11	2,30	9893	25
1,24	8925	19	1,64	9495	10	2,40	9918	20
1,25	8944	18	1,65	9505	10	2,50	9938	15
1,26	8962	18	1,66	9515	10	2,60	9953	12
1,27	8980	17	1,67	9525	10	2,70	9965	9
1,28	8997	18	1,68	9535	10	2,80	9974	7
1,29	9015	17	1,69	9545	9	2,90	9981	5
1,30	0,9032	17	1,70	0,9554	10	3,00	0,9986	4
1,31	9049	17	1,71	9564	9	3,10	9990	3
1,32	9066	16	1,72	9573	9	3,20	9993	2
1,33	9082	17	1,73	9582	9	3,30	9995	2
1,34	9099	16	1,74	9591	8	3,40	9997	1
1,35	9115	16	1,75	9599	9	3,50	9998	0
1,36	9131	16	1,76	9608	8	3,60	9998	1
1,37	9147	15	1,77	9616	9	3,70	9999	0
1,38	9162	15	1,78	9625	8	3,80	9999	1
1,39	9177	15	1,79	9633	8	3,90	1,0000	
1,40	0,9192	15	1,80	0,9641	8			
1,41	9207	15	1,81	9649	7			
1,42	9222	14	1,82	9656	8			
1,43	9236	15	1,83	9664	7			
1,44	9251	14	1,84	9671	7			
1,45	9265	14	1,85	9678	8			
1,46	9279	13	1,86	9686	7			
1,47	9292	14	1,87	9693	6			
1,48	9306	13	1,88	9699	7			
1,49	9319	13	1,89	9706	7			

Изд. лиц. ЛР № 071765 от 07.12.1998
Казахстанско-Российский университет
Объем 7,5 п.л. Тираж 301